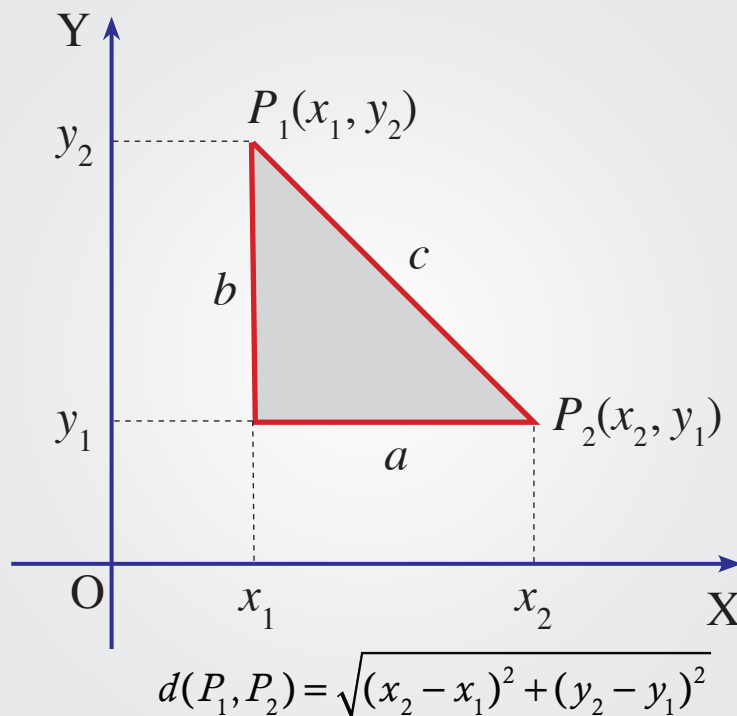


MATEMÁTICA

Tercer Año de Bachillerato



JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN

MATEMÁTICA

Tercer Año de Bachillerato
JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN

Profesor del Dpto. de Física de la Universidad de Oriente

Composición de textos y diagramación:
Júpiter Figuera Yibirín
Cumaná-Edo. Sucre-Venezuela

ISBN: 980-262-441-1

Agradecimiento

Este texto se concluyó con la valiosa ayuda de las siguientes personas:

Prof. Oscar Díaz Lucart
Prof. José Romero Meaño
Prof. Rubén Gómez
Ing° Oscar Pizarro
Br. Francisco Betancourt
Sr. Carlos Alfonzo

Dedicatoria

A mi padre, crisol de voluntades férreas
A Doly, mi eterna compañera de viaje

PREFACIO

Esta nueva edición de mi libro de Matemática para 3er año de bachillerato recoge la sugerencia de varios profesores del área en cuanto a la presentación de la información y la diagramación del mismo. Todos los dibujos han sido renovados para hacerlos más atractivos y mejorar la calidad del texto.

Vale la pena recordar lo ya expresado en la primera edición:

- Es muy importante cumplir con los programas establecidos por el Ministerio de Educación. Para ello, es necesario un cambio en nuestro modo de pensar en cuanto a la duración del año escolar. Sólo si cubrimos todos los objetivos, podemos estar más seguros de una sólida formación teórica.
- Hay que enfatizar la formación autodidacta reforzando el hábito de la lectura. El estudiante debe tratar de entender todo lo que leyó. Para ello, es recomendable que el profesor, una vez seleccionado un libro de texto, debe tratar de apegarse al mismo, de manera que el estudiante tenga al menos una referencia importante.
- La Matemática no sólo es resolver problemas de manera automática. Dentro de sus virtudes está la de transmitir la ideas de belleza y razonamiento lógico, presentes en cada uno de los temas que se estudian.

Júpiter Figuera Yibirín

Cumaná, mayo 2017

CONTENIDO

Agradecimiento y dedicatoria	iii
Prefacio	iv
Contenido	v
Capítulo 1	
1.1 Expresión decimal de un número racional	1
1.2 Fracción generatriz de una expresión decimal	2
1.3 Números racionales y números irracionales	5
1.4 Operaciones en el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales	7
1.5 Representación de los números irracionales sobre la recta numérica. El teorema de Pitágoras	7
Capítulo 2	
2.1 El conjunto de los números reales	14
2.2 Subconjuntos notables de $\mathbb{R}$	16
2.3 Aproximaciones por defecto y por exceso de un número real	17
Capítulo 3	
3.1 Adición de números reales	22
3.2 Propiedades de la adición de números reales	24
3.3 Sustracción de números reales	25
3.4 Adición y sustracción combinada de números reales	25
Capítulo 4	
4.1 Multiplicación de números reales	28
4.2 Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{R}$	30
4.3 La división en $\mathbb{R}$	32
Capítulo 5	
5.1 Potenciación en $\mathbb{R}$ con exponentes enteros	34
5.2 Potenciación en $\mathbb{R}$ con exponentes entero negativo	36
5.3 Potenciación con exponente cero	36
5.4 Multiplicación de potencias de igual base	37
5.5 División de potencias de igual base	37
5.6 Potencia de un producto	39
5.7 Potencia de una potencia	39
Capítulo 6	
6.1 La raíz cuadrada de un número real positivo	42
6.2 Raíz n -sima de un número real	43
6.3 Raíz de un producto. Multiplicación de raíces de igual	

índice.	45
6.4 Raíz de un cociente. División de raíces de igual índice.	46
6.5 Raíz de una raíz	49
6.6 Introducción de factores dentro de una raíz	49
6.7 Simplificación de radicales	50
6.8 Amplificación de radicales	51
6.9 Extracción de factores de una raíz	51
6.10 Reducción de radicales a un mismo índice	52
Capítulo 7	
7.1 Potencia de un número real con exponente racional	55
7.2 Ejercicio adicionales sobre multiplicación y división de radicales	57
7.3 Radicales semejantes	58
7.4 Adición y sustracción de radicales semejantes	59
Capítulo 8	
8.1 Racionalización de fracciones con numeradores o denominadores monómicos	61
8.3 Racionalización de fracciones con numeradores o denominadores binómicos	62
Capítulo 9	
9.1 Relaciones de orden "mayor que" y "menor que" en los números reales	65
9.2 Relación "mayor o igual que" en $\mathbf{R}$	67
9.3 Relación "menor o igual que" en $\mathbf{R}$	67
9.4 Suma de un número real a ambos miembros de una desigualdad	68
9.5 Multiplicación de los miembros de una desigualdad por un número real positivo	69
9.6 Multiplicación de los miembros de una desigualdad por un número real negativo	69
Capítulo 10	
10.1 Valor absoluto de un número real	71
10.2 Propiedades del valor absoluto	72
10.3 Solución de ecuaciones de la forma $ ax + b = c$	74
Capítulo 11	
11.1 Los números reales y la recta numérica	77
Capítulo 12	
12.1 Construcción de un sistema de coordenadas sobre una recta L	81

12.2	Distancia desde el origen a cualquier punto de la recta real	82
12.3	Distancia entre dos puntos de la recta real	83

Capítulo 13

13.1	Intervalos en $\mathbf{R}$	85
13.2	Intervalos cerrados	85
13.3	Intervalos abiertos	87
13.4	Intervalos semiabiertos o semicerrados	90
13.5	Intervalos al infinito	93
13.6	Operaciones de inclusión, unión e intersección de intervalos	96

Capítulo 14

14.1	Inecuaciones de primer grado en $\mathbf{R}$	101
14.2	Inecuaciones de primer grado con valor absoluto	106
14.3	Sistema de inecuaciones	110
14.4	Problemas sobre inecuaciones de primer grado	112

Capítulo 15

15.1	Sistema de coordenadas cartesianas en el plano real	115
15.2	Coordenadas de un punto	116
15.3	Puntos notables en un sistema de coordenadas cartesianas	117
15.4	Distancia entre dos puntos del plano real	121

Capítulo 16

16.1	Funciones	125
16.2	Función real. Dominio y rango.	126
16.3	Representación gráfica de funciones	128

Capítulo 17

17.1	La función afín	134
17.2	Pendiente de una recta	136
17.3	Punto perteneciente a una recta	141
17.4	Determinación gráfica de la pendiente m	141
17.5	Ecuación general de la recta	144
17.6	Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos	147
17.7	Posición relativa de dos rectas	150

Capítulo 18

18.1	Sistema de ecuaciones. Método gráfico de solución.	153
18.2	Sistemas de ecuaciones compatibles e incompatibles	156

18.3	Método de sustitución para la solución de sistemas de ecuaciones	160
18.4	Método de igualación	164
18.5	Método de reducción o eliminación	165
18.6	Problemas que requieren la solución de sistemas de ecuaciones	171

Capítulo 19

19.1	La función cuadrática y su representación gráfica	183
19.2	Concavidad de una parábola. Eje de simetría.	184
19.3	Máximo o mínimo de una parábola	186
19.4	Corte de una parábola con los ejes cartesianos	189

Capítulo 20

20.1	Ecuaciones cuadráticas	196
20.2	Solución de una ecuación cuadrática pura	197
20.3	Solución de una ecuación cuadrática mediante factorización	198
20.4	El cuadrado de una suma como método para resolver una ecuación cuadrática	200
20.5	La fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado	202
20.6	Ecuación cuadrática con la incógnita en el denominador	208
20.7	Ecuaciones con términos irracionales	209

Capítulo 21

21.1	Problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas	212
------	---	-----

Capítulo 22

22.1	El teorema de Pitágoras	218
------	-------------------------	-----

Capítulo 23

23.1	Teorema de Euclides. Comprobación geométrica.	225
23.2	Demostración del teorema de Euclides	226
23.3	Aplicaciones del teorema de Euclides	227

Capítulo 24

24.1	Razón entre dos segmentos de una recta. Segmentos proporcionales.	231
24.2	Teorema de Thales	232

Capítulo 25

25.1	Figuras congruentes y figuras semejantes	236
25.2	Lo que caracteriza a figuras geométricas semejantes	237

25.3 Criterios de semejanzas de triángulos	238
--	-----

Capítulo 26

26.1 Media aritmética de datos no organizados. Moda de una distribución	246
26.2 Frecuencia absoluta. Distribución de frecuencias.	248
26.3 Distribución de frecuencias para datos agrupados	249
26.4 Media aritmética y moda de datos organizados	253
26.5 El concepto de probabilidad	256
26.6 Probabilidad de que un suceso no ocurra	262
26.7 Diagramas de árbol	265

Capítulo 27

27.1 ¿Qué es una computadora? Hardware y software	273
27.2 Componentes de un sistema de computación	274

Capítulo 28

28.1 Lenguajes de programación	278
28.2 Instrucciones y operaciones elementales del lenguaje BASIC	279
28.3 Instrucción CLS	279
28.4 Instrucción PRINT	279
28.5 Programación elemental en el lenguaje BASIC	283
28.6 Instrucciones FOR...NEXT y END	286
28.7 Constantes	287
28.8 Variables	288

Respuestas a los ejercicios	290
-----------------------------	-----

Bibliografía	301
--------------	-----

Índice alfabético	302
-------------------	-----

1.1 EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

La expresión decimal de una fracción es el número que resulta cuando se divide el numerador por el denominador de dicha fracción. Así:

Fracción	Expresión decimal	Período
$\frac{1}{4}$	0,25	0
$\frac{5}{8}$	0,625	0
$\frac{1}{3}$	0,33 $\widehat{3}$...	3
$\frac{1}{9}$	0,11 $\widehat{1}$...	1
$\frac{4}{33}$	0,121 $\widehat{2}$...	12
$\frac{1}{6}$	0,166 $\widehat{6}$...	6

En relación con la tabla anterior, podemos hacer las siguientes definiciones:

1. A las cifras que quedan a la derecha de la coma se les denomina **cifras decimales**.
2. Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ dan lugar a un *número limitado de cifras decimales*. A tales fracciones se les denomina **fracciones exactas**.
3. Las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{33}$ y $\frac{1}{6}$ originan un *número ilimitado de cifras decimales*. A tales fracciones se les denomina **fracciones inexactas**.
4. Observa que en las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{33}$ y $\frac{1}{6}$ hay cifras o grupos de cifras que se repiten. A estas cifras se les llama **período**. Al período se le denota mediante un pequeño arco encima del mismo. Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{8}$ tienen período igual a cero. Las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{4}{33}$ tienen períodos 3, 1 y 12 respectivamente. La fracción $\frac{1}{6}$ tiene período 6.
5. Como podrás observar de la tabla anterior, para las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{4}{33}$, el período empieza después de la coma, en la posición de las décimas. A tales fracciones se les conoce como **fracciones periódicas puras**.

6. En el caso de la fracción $\frac{1}{6}$, existe un número entre la coma y el período. Para la fracción $\frac{1}{6} = 0,166\dots$, este número es 1. A estas fracciones se les conoce como **fracciones periódicas mixtas**. Al número entre la coma y el período se le denomina **anteperíodo**.

■ EJEMPLO 1.1

Determina la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{33}$

d) $\frac{10}{24}$

Solución

La expresión decimal se obtiene dividiendo el numerador por el denominador:

a) $\frac{3}{5} = 0,6$

Se trata de una fracción decimal exacta y por tanto no periódica o de período cero.

b) $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\overline{3}$

Es una fracción decimal inexacta de período 3, ya que el número 3 de la parte decimal se repite indefinidamente. Es, además, una fracción periódica pura, ya que no hay número alguno (anteperíodo) entre la coma y el período.

c) $\frac{5}{33} = 0,1515\dots = 0,\overline{15}$

Es una fracción decimal inexacta de período 15. Se trata de una fracción periódica pura por no tener anteperíodo.

d) $\frac{10}{24} = 0,41666\dots = 0,41\overline{6}$

Es una fracción decimal inexacta de período 6. El anteperíodo es 41, ya que éste es el número existente entre la coma y el período.

1.2 FRACCIÓN GENERATRIZ DE UNA EXPRESIÓN DECIMAL

*A la fracción irreducible que da origen a un número decimal se le denomina **fracción generatriz**.*

En el ejemplo anterior:

$\frac{3}{5}$ es la fracción generatriz de 0,6

$\frac{1}{3}$ es la fracción generatriz de $0,333\dots = 0,\overline{3}$

$\frac{5}{33}$ es la fracción generatriz de $0,1515\dots = 0,\overline{15}$

$\frac{10}{24}$ es la fracción generatriz de $0,41666\dots = 0,41\overline{6}$

El método para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal depende del tipo de expresión. A continuación revisamos la forma de hallar la fracción generatriz de expresiones decimales exactas, periódicas puras y periódicas mixtas. Esto ya fue estudiado por ti en 7° grado.

1.2.1 Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

En este caso, la fracción generatriz se obtiene de la forma siguiente:

- a) El numerador será igual al número entero que resulte al eliminar la coma.
- b) El denominador será la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal.

Si es posible, la fracción resultante debe reducirse. Así, para los números decimales 0,75 y 0,625 las fracciones generatrices son:

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

El número sin la coma

Fracción reducida al dividir numerador y denominador por 25

La unidad seguida de 2 ceros
(porque hay 2 cifras decimales)

Luego, $\frac{3}{4}$ es la fracción generatriz de 0,75.

$$0,625 = \frac{625}{1.000} = \frac{5}{8}$$

El número sin la coma

Fracción reducida al dividir numerador y denominador por 125

La unidad seguida de 3 ceros
(porque hay 3 cifras decimales)

Luego, $\frac{5}{8}$ es la fracción generatriz de 0,625.

■ EJERCICIO 1.1

Obtén la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales:

- | | | | |
|----------|-----------|----------|----------|
| a) 0,125 | b) 0,32 | c) 0,1 | d) -0,25 |
| e) 1,25 | f) -2,175 | g) -1,16 | h) 2,625 |

1.2.2 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura

La fracción generatriz, en este caso, se obtiene de la forma siguiente:

- a) El numerador será igual al período.
- b) El denominador será igual a tantos 9 como cifras tenga el período.

La fracción resultante, si es posible, debe reducirse. Tomemos como ejemplo las expresiones decimales $0,111\dots$ y $0,1212\dots$ de períodos 1 y 12 respectivamente:

$$0,111\dots = 0,\widehat{1} = \frac{1}{9} \quad \text{Período 1} \quad \text{Un 9 porque el período tiene una sola cifra}$$

$$0,1212\dots = 0,\widehat{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \quad \text{Período 12} \quad \text{Dos 9 porque el período tiene 2 cifras}$$

Fracción reducida al dividir numerador y denominador por 3

Luego, $\frac{1}{9}$ y $\frac{4}{33}$ son las fracciones generatrices de las expresiones decimales $0,111\dots$ y $0,1212\dots$

■ EJERCICIO 1.2

Obtén las fracciones generatrices de las siguientes expresiones decimales:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| a) $0,\widehat{6}$ | b) $0,\widehat{10}$ | c) $1,\widehat{03}$ | d) $-0,\widehat{25}$ |
| e) $1,\widehat{15}$ | f) $2,\widehat{27}$ | g) $-2,777\dots$ | h) $0,\widehat{94}$ |

1.2.3 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta

En este caso, la fracción generatriz se obtiene de la forma siguiente:

- a) El numerador es igual al anteperíodo seguido del período menos el anteperíodo
- b) El denominador será igual a tantos 9 como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Considera la expresión decimal $0,166\dots$ cuyo período es 6 y cuyo anteperíodo es 1. De acuerdo a lo anterior, se tendrá:

$$0,166... = 0,1\overline{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

Anteperíodo

Un cero porque el anteperíodo tiene una cifra

Un 9 porque el período tiene una cifra

Para la expresión decimal $0,355...$ el resultado es:

$$0,355... = 0,3\overline{5} = \frac{35 - 3}{90} = \frac{16}{45}$$

Luego las fracciones generatrices de $0,166...$ y $0,355...$, son $\frac{1}{6}$ y $\frac{16}{45}$ respectivamente.

■ EJERCICIO 1.3

Obtén la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales:

- | | | | |
|----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $0,2\overline{5}$ | b) $0,3\overline{2}$ | c) $0,01\overline{2}$ | d) $0,32\overline{4}$ |
| e) $1,5888...$ | f) $-2,34\overline{68}$ | g) $0,7\overline{4}$ | h) $3,23\overline{7}$ |

1.3 NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS IRRACIONALES

De acuerdo con lo estudiado en las secciones 1.2.2 y 1.2.3, todo número perteneciente al conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales puede representarse mediante una fracción decimal periódica. Así:

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3} \quad (\text{Período } 3) \quad \frac{4}{33} = 0,1212... = 0,\overline{12} \quad (\text{Período } 12)$$

$$\frac{2}{5} = 0,4 \quad (\text{Período } 0)$$

Dicho en otras palabras:

*Toda expresión decimal periódica puede ser representada mediante una **fracción generatriz**.*

Existen números decimales no periódicos que no pueden representarse mediante

una fracción generatriz:

*A los números decimales no periódicos que no tienen fracción generatriz, se les conoce con el nombre de **números irracionales** .*

Al conjunto de los números irracionales se les denota mediante la letra π . Ahora bien, ¿de dónde surgen estos números decimales no periódicos? Hay varias situaciones numéricas que dan origen a tales números. Un ejemplo clásico es el número π (pi). Este número irracional se obtiene al dividir la longitud de una circunferencia por su diámetro. Es decir:

$$\pi = \frac{\text{Longitud de una circunferencia}}{\text{Diámetro de la circunferencia}}$$

Cuando la relación anterior se aplica a cualquier circunferencia, se obtiene:

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832\dots$$

donde los puntos suspensivos indican que el número sigue indefinidamente. En la mayoría de los casos, π es aproximado a 3,14; pero realmente es un número de infinitas cifras. Como puedes observar de la expresión para π , se trata de una expresión decimal sin período y, contrario a lo que sucede en el caso de los números racionales, no tiene fracción generatriz. Se originan también números irracionales cuando se obtienen las raíces cuadradas de los números primos. Así:

$$\sqrt{2} = 1,414213\dots \quad \sqrt{7} = 2,645751\dots \quad \sqrt{23} = 4,795831\dots$$

Las raíces cuadradas de números naturales pares que no sean cuadrados perfectos también son números irracionales:

$$\sqrt{8} = 2,828427\dots (\text{Irracional}) \quad \sqrt{144} = 12 \text{ (Racional)}$$

■ EJEMPLO 1.2

Utiliza una calculadora, cuando sea necesario, para determinar si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{4,6656}$ d) $\sqrt[3]{18}$ e) $\sqrt[3]{-8}$ f) $1 + \pi$

Solución

a) $\sqrt{121} = 11$ (Racional) c) $\sqrt{4,6656} = 2,16$ (Racional) e) $\sqrt[3]{-8} = -2$ (Racional)	b) $\sqrt{75} = 8,66025\dots$ (Irracional) d) $\sqrt[3]{18} = 2,620741\dots$ (Irracional) f) $1 + \pi = 1 + 3,141592\dots$ (Irracional)
--	---

1.4 OPERACIONES EN EL CONJUNTO I DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Con los números irracionales se pueden efectuar las mismas operaciones que en los conjuntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ ya estudiadas por ti.

1.4.1 Adición y sustracción en I

Cuando se suman o se restan dos números irracionales, el resultado no es, necesariamente, un número irracional. Así, tenemos:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1,4142... + 1,7320... = 3,1462... \quad (\text{Irracional})$$

$$\pi + \pi = 3,1415... + 3,1415... = 6,2830... \quad (\text{Irracional})$$

$$\pi - \pi = 3,1415... - 3,1415... = 0 \quad (\text{Racional})$$

1.4.2 Multiplicación y división en I

Cuando se multiplican o dividen números irracionales, el resultado puede ser un número irracional o un número racional. Como ejemplos tenemos:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (1,4142...) \cdot (1,7320...) = 2,4493... \quad (\text{Irracional})$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3 \quad (\text{Racional})$$

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{54}{18}} = \sqrt{3} \quad (\text{Racional})$$

$$\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{180}{5}} = \sqrt{36} = 6 \quad (\text{Racional})$$

1.5 REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES SOBRE LA RECTA NUMÉRICA. EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras es una relación numérica entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Considera la fig. 1.1. Se trata de un triángulo rectángulo de lados AB , BC y CA . A los lados BC y CA que forman el ángulo recto se les denomina **catetos**, mientras que al lado AB se le denomina **hipotenusa**. El teorema de Pitágoras establece:

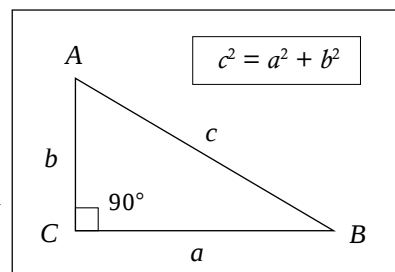


Fig. 1.1 Triángulo rectángulo.

La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Si llamamos a y b a las longitudes de los catetos, y c a la longitud de la hipotenusa, podemos escribir:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.1)$$

La relación (1.1) también se puede enunciar de la manera siguiente:

El área del cuadrado construido con lado igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos con lados iguales a los de sus catetos.

La definición anterior permite dibujar la fig 1.2, de la cual puede visualizarse la demostración gráfica del teorema de Pitágoras. En efecto, sobre los lados AC y CB están contruidos cuadrados de lados 3 unidades y 4 unidades respectivamente.

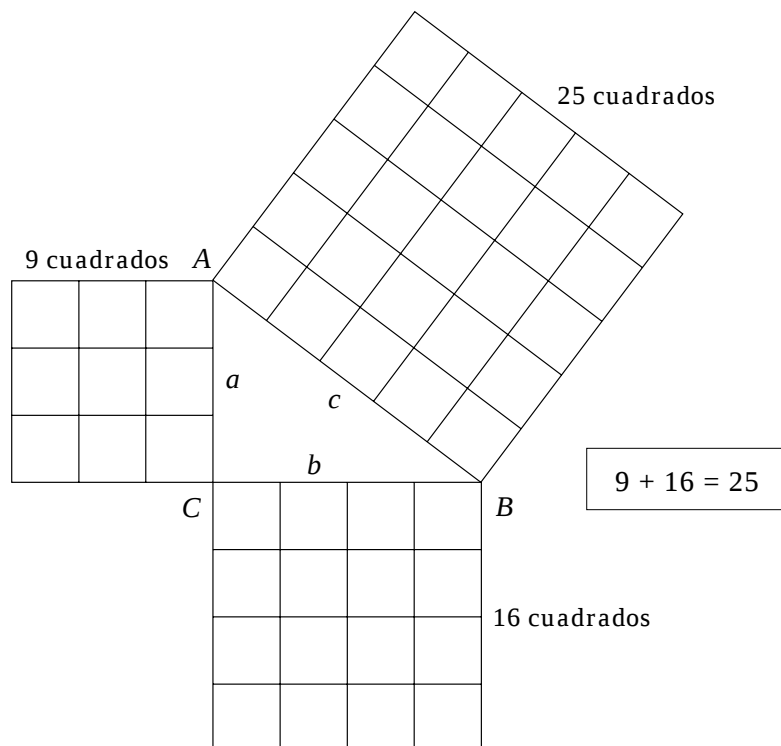


Fig. 1.2 Demostración gráfica del teorema de Pitágoras.

Para la fig. 1.2 se puede escribir:

Área del cuadrado de lado AC : $a^2 = 3^2 = 9$ (Cateto)

Área del cuadrado de lado CB : $b^2 = 4^2 = 16$ (Cateto)

La hipotenusa tiene una longitud de 5 unidades y por tanto:

Área del cuadrado de lado AB : $c^2 = 5^2 = 25$

Se verifica entonces que: $c^2 = a^2 + b^2$

Lo demostrado arriba para el caso particular de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 unidades es general para cualquier otro triángulo rectángulo. La longitud de la hipotenusa está dada, de acuerdo a la relación (1.1) por:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.2)$$

La relación (1.2), deducida del teorema de Pitágoras, permite establecer el origen de muchos números irracionales, como se ve en la fig. 1.3. En los casos allí presentados, la hipotenusa corresponde siempre a números irracionales.

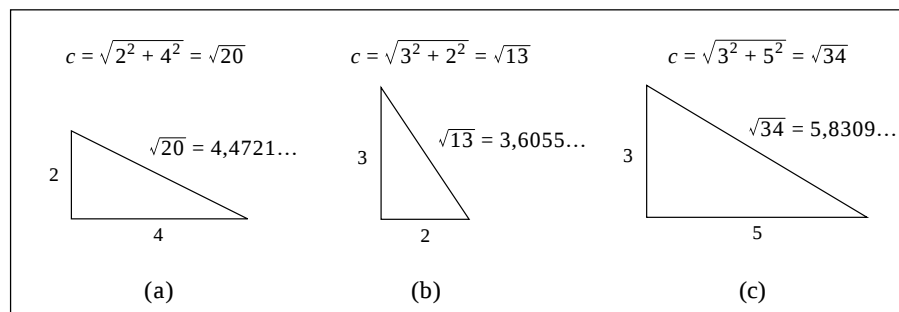


Fig. 1.3 La hipotenusa de los triángulos rectángulos mostrados corresponden a números irracionales.

Los números irracionales generados por el uso del teorema de Pitágoras pueden ser representados, mediante una construcción geométrica, sobre la recta numérica. Considera por ejemplo el número irracional $\sqrt{13}$. Este se puede obtener como se indica en la fig. 1.3 (b). Es decir:

$$\text{Hipotenusa : } c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = 3.6055\dots$$

A fin de representar $\sqrt{13}$ sobre la recta numérica, se procede de la siguiente

manera (ver fig. 1.4):

1. Se expresa el número 13 en términos de la suma de los cuadrados de dos números enteros. En este caso:

$$13 = 2^2 + 3^2$$

De esta manera se crea un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 y 3 unidades y cuya hipotenusa mide:

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

2. Sobre la recta numérica se dibuja el cateto de longitud 2 unidades. Este corresponde al lado AC en la fig. 1.4.
3. En el extremo del cateto AC se levanta el cateto CB de longitud igual a 3 unidades. La hipotenusa, correspondiente al número irracional $\sqrt{13}$, se obtiene uniendo A con B .
4. Con centro en el origen de la recta numérica (punto O) y radio AB , se traza un arco de circunferencia a partir del extremo B en el sentido de giro de las agujas del reloj (por tratarse de un número irracional positivo). El punto donde este arco corta la recta numérica, corresponde a $\sqrt{13}$.

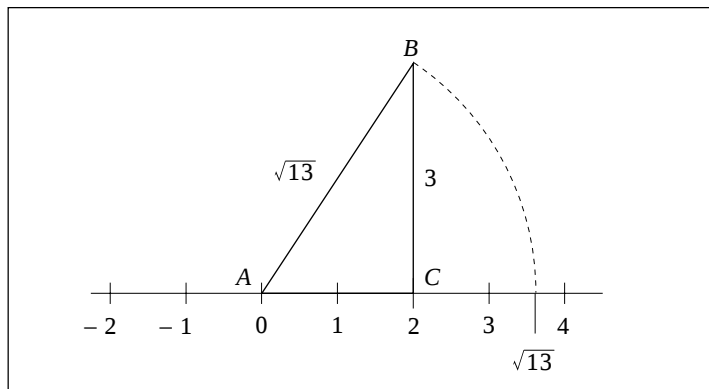


Fig. 1.4 Representación del número irracional $\sqrt{13}$ sobre la recta numérica.

■ EJEMPLO 1.3

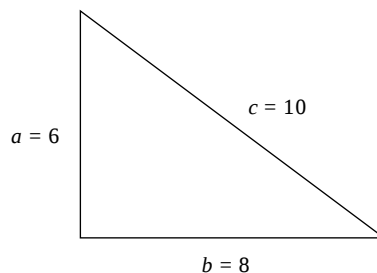
De un triángulo rectángulo se conocen: a) La longitud e los catetos: $a = 6$, $b = 8$. b) La longitud de los catetos: $a = 7$, $b = 10$. c) La longitud de un cateto: $a = 2$ y la de la hipotenusa $c = \sqrt{51}$. Calcula el tercer lado del triángulo y determina si se trata de números racionales o irracionales.

Solución

a) $c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$$c = \sqrt{100} = 10$$

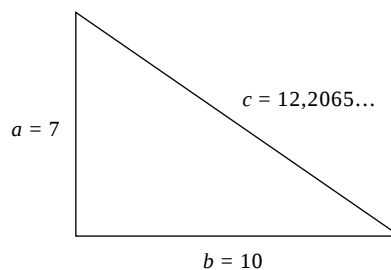
La hipotenusa es un número racional.



b) $c^2 = a^2 + b^2 = 7^2 + 10^2 = 49 + 100 = 149$

$$c = \sqrt{149} = 12,2065\dots$$

La hipotenusa es un número irracional.

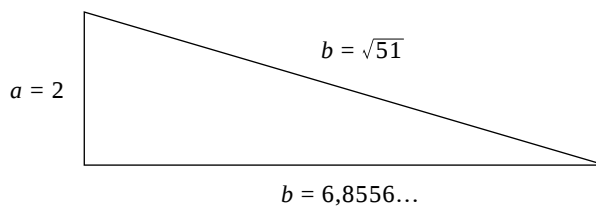


c) Despejemos el cateto b de la expresión para el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Sustituyendo valores:

$$c^2 = 51 \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{51 - 4} = \sqrt{47} = 6,8556\dots$$



Luego, el cateto b es un número irracional.

■ EJEMPLO 1.4

Representa los siguientes números irracionales:

a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt{10}$

c) $-\sqrt{13}$

d) $\sqrt{12}$

Solución

- a) El número irracional $\sqrt{18}$ se puede expresar como:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

Por tanto, para representarlo utilizamos un triángulo rectángulo con catetos que miden 3 unidades cada uno. Como se indica en la figura 1.5, la hipotenusa corresponde a $\sqrt{18}$. Con centro en A y radio AB , trazamos un arco en sentido horario que corta a la recta numérica en el valor correspondiente a $\sqrt{18}$.

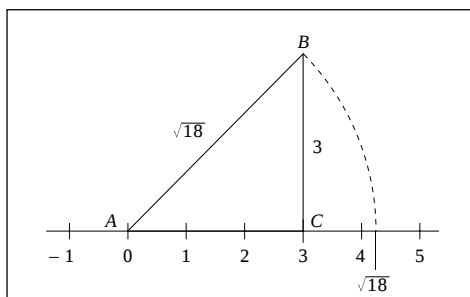


Fig. 1.5 Ejemplo 1.4 (a).

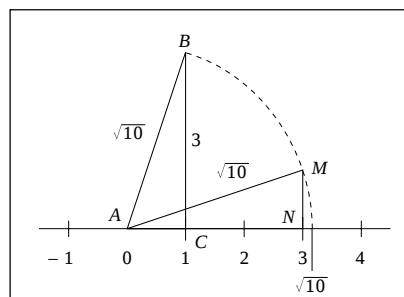


Fig. 1.6 Ejemplo 1.4 (b).

- b) El número irracional $\sqrt{10}$ se puede expresar como:

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

Luego, para representarlo usamos un triángulo rectángulo de catetos que midan 3 unidades y 1 unidad. Los triángulos ABC y AMN de la fig. 1.6 reúnen las condiciones para representar al número $\sqrt{10}$. Si hacemos centro en A con radio AB o AM y trazamos un arco en sentido horario, se obtiene el punto de corte a la recta numérica correspondiente a $\sqrt{10}$.

- c) El número irracional $-\sqrt{13}$ se puede expresar como:

$$-\sqrt{13} = -\sqrt{3^2 + 2^2}$$

Como se muestra en la fig. 1.7, $\sqrt{13}$ se obtiene como la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 2. Para hallar la representación de $\sqrt{13}$ sobre la recta numérica, hacemos centro en A y con radio AB describimos un arco de circunferencia en sentido antihorario. El corte con la recta numérica corresponde a $-\sqrt{13}$.

- d) Este problema difiere de los anteriores en que el número irracional $\sqrt{12}$ se origina en una diferencia de cuadrados y no en una suma como en los casos ya tratados. En efecto:

$$\sqrt{12} = -\sqrt{4^2 - 2^2}$$

Como se indica en la fig 1.8, $\sqrt{12}$ corresponde a uno de los catetos del triángulo rectángulo ABC . Por tanto, el lado $BC = \sqrt{12}$ será la longitud buscada. Con centro en A y arco de circunferencia de radio BC , buscamos el punto de corte con la recta numérica correspondiente a $\sqrt{12}$.

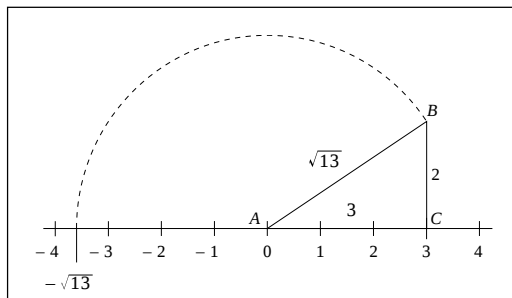


Fig. 1.7 Ejemplo 1.4 (c).

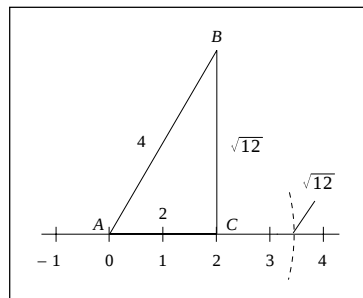


Fig. 1.8 Ejemplo 1.4 (d).

EJERCICIOS

1.4 Determina si los números son racionales o irracionales:

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------|
| a) $\sqrt{1.296}$ | b) $\sqrt{10.649}$ | c) $\sqrt{565}$ |
| d) $-\sqrt{74}$ | e) $\sqrt{41}$ | f) $\pi + 2$ |

1.5 De un triángulo rectángulo se conocen:

- a) La medida de los catetos: $a = 3$, $b = 4$
- b) La medida de los catetos: $a = 6$, $b = 7$
- c) Las medidas de los catetos, $a = 11$ y de la hipotenusa, $c = 25$

Calcula la medida del tercer lado del triángulo y determina si se trata de números racionales o irracionales.

1.6 Representa sobre la recta numérica los siguientes números:

- | | | | |
|------|-------|------------------|-------------------|
| a) 5 | b) -3 | c) $\frac{3}{4}$ | d) $-\frac{5}{2}$ |
|------|-------|------------------|-------------------|

1.7 Representa sobre la recta numérica los siguientes números:

- | | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| a) $\sqrt{5}$ | b) $\sqrt{26}$ | c) $\sqrt{41}$ | d) $-\sqrt{5}$ |
| e) $-\sqrt{26}$ | f) $-\sqrt{41}$ | g) $\sqrt{15}$ | h) $\sqrt{40}$ |

2.1 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales, $\mathbf{R}$, es la unión del conjunto de los números racionales, $\mathbf{Q}$, y el conjunto de los números irracionales, $\mathbf{I}$.

De acuerdo a la definición, podemos escribir:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} \quad (2.1)$$

Además, se puede decir:

Un número real es cualquier número que se puede representar mediante una expresión decimal periódica o no periódica.

Entonces, son números reales:

$$3 \quad 0,96 \quad \pi \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt[3]{5} \quad -52$$

Como los elementos del conjunto $\mathbf{I}$ no pertenecen al conjunto $\mathbf{Q}$ y viceversa, la intersección de $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{I}$ es el conjunto vacío, ϕ .

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \phi \quad (2.2)$$

Hasta ahora habíamos estudiado los siguientes conjuntos de números, algunos de cuyos elementos son:

- El conjunto de los números naturales ($\mathbf{N}$): $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- El conjunto de los números enteros ($\mathbf{Z}$): $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- El conjunto de los números racionales ($\mathbf{Q}$): $\{\dots, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots\}$
- El conjunto de los números irracionales ($\mathbf{I}$): $\{\dots, -\sqrt{2}, -\pi, \sqrt{5}, \pi, \dots\}$

El conjunto de los números reales ($\mathbf{R}$) engloba a los conjuntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, e $\mathbf{I}$, de manera que podemos escribir:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \quad \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \quad \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{R} \quad (2.3)$$

Una representación gráfica de estas relaciones conducen a la fig. 2.1. El conjunto **R** de los números reales corresponde a la botella más grande y comprende a los conjuntos **Q** e **I**. El conjunto **Q** contiene a los conjuntos **Z** y **N**. El conjunto **Z** contiene al conjunto **N**.

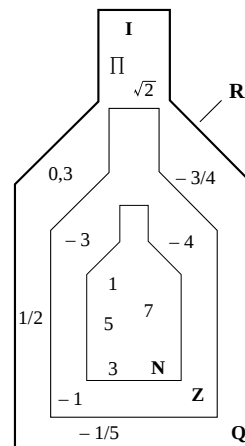


Fig. 2.1 Representación gráfica de los conjuntos **R**, **Q**, **Z**, **N**, e **I**.

■ EJEMPLO 2.1

Usa los símbolos $\in$ (pertenencia) y $\notin$ (no pertenencia) para expresar los conjuntos a los cuales pertenecen los siguientes números:

- a) 25 b) -10 c) 1,25 d) $\frac{\pi}{4}$ e) $-0,\overline{3}$

Solución

- a) $25 \in \mathbf{R}$ $25 \in \mathbf{Q}$ $25 \in \mathbf{Z}$ $25 \in \mathbf{N}$ $25 \notin \mathbf{I}$
- b) $-10 \in \mathbf{R}$ $-10 \in \mathbf{Q}$ $-10 \in \mathbf{Z}$ $-10 \notin \mathbf{N}$ $-10 \notin \mathbf{I}$
- c) $1,25 \in \mathbf{R}$ $1,25 \in \mathbf{Q}$ $1,25 \notin \mathbf{Z}$ $1,25 \notin \mathbf{N}$ $1,25 \notin \mathbf{I}$
- d) $\frac{\pi}{4} \in \mathbf{R}$ $\frac{\pi}{4} \notin \mathbf{Q}$ $\frac{\pi}{4} \notin \mathbf{Z}$ $\frac{\pi}{4} \notin \mathbf{N}$ $\frac{\pi}{4} \in \mathbf{I}$
- e) Como $-0,\overline{3} = -\frac{1}{3}$:
- $-\frac{1}{3} \in \mathbf{R}$ $-\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$ $-\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$ $-\frac{1}{3} \notin \mathbf{N}$ $-\frac{1}{3} \notin \mathbf{I}$

Con los valores anteriores podemos construir la siguiente tabla:

	R	Q	Z	N	I
25	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
-10	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
1,25	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\frac{\pi}{4}$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$-0,\overline{3}$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

◆ EJERCICIOS

2.1 Usa los símbolos $\in$ y $\notin$ para expresar los conjuntos a los cuales pertenecen los siguientes números:

- a) -8 b) 17 c) $\frac{5}{7}$ d) $-\frac{1}{9}$ e) $1,6\overline{2}$
 f) $\sqrt{7}$ g) 6 h) $-\pi$ i) $3,64$ j) $-2,\overline{7}$

2.2 Completa la tabla siguiente con los símbolos de pertenencia ($\in$) y no pertenencia ($\notin$):

	3	-2	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{2}$	4,18	$\frac{\pi}{2}$
Q		$\in$				
I						

2.3 Completa la tabla adjunta con los símbolos $\in$ y $\notin$.

	R	Q	Z	N	I
11,24					
-22					
$-\sqrt{32}$					
$-0,\overline{18}$					

2.4 De acuerdo con tus conocimientos anteriores y la fig. 2.1, determina el resultado de las siguientes operaciones:

- a) $Q \cap N$ b) $Q \cap N^+$ c) $N \cap Z$ d) $N \cap Z^-$
 e) $R \cap I$ f) $I \cap N$ g) $Z^+ \cap I$ h) $I \cup Q$
 i) $N \cup Z$ j) $Z \cup Z^-$ k) $Z^+ \cup Z^+$ l) $Q^* \cup Z^-$

2.2 SUBCONJUNTOS NOTABLES DE R

De acuerdo a la fig. 2.1, a **R** pertenecen los siguientes conjuntos:

N : el conjunto de los números naturales

Z : el conjunto de los números enteros

Q : el conjunto de los números racionales

I : el conjunto de los números irracionales

Además, entre los subconjuntos notables de $\mathbf{R}$ figuran:

$\mathbf{R}^+$: el conjunto de los números reales positivos, tales como:

$$(1, 0, 5, \pi, \sqrt{2}, \frac{6}{7})$$

$\mathbf{R}^-$: el conjunto de los números reales negativos, tales como:

$$(-1, -0, 5, -\pi, -\sqrt{2}, -\frac{6}{7})$$

$\mathbf{R}^*$: el conjunto de los números reales sin incluir al cero,

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$$

■ EJEMPLO 2.2

Dado el diagrama de la fig. 2.2, determina las siguientes operaciones:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}$ | b) $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{I}^+$ |
| c) $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{R}$ | d) $\mathbf{R} \cap \mathbf{I}$ |
| e) $\mathbf{R}^+ \cap \{0\}$ | f) $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{I}^+$ |

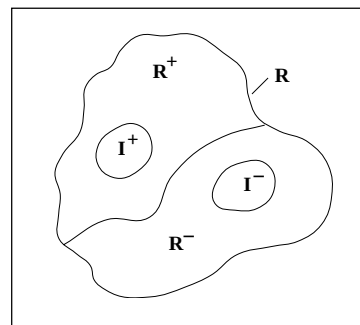


Fig. 2.2 Ejemplo 2.2.

Solución

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R} = \mathbf{R}$ | b) $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{I}^+ = \mathbf{I}^+$ | c) $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}^+$ |
| d) $\mathbf{R} \cap \mathbf{I} = \mathbf{I}$ | e) $\mathbf{R}^+ \cap \{0\} = \emptyset$ | f) $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{I}^+ = \mathbf{R}^+$ |

2.3 APROXIMACIONES POR DEFECTO Y POR EXCESO DE UN NÚMERO REAL

Cuando manejamos números reales (rationales e irracionales), es práctica común utilizar aproximaciones a los mismos. Para que entiendas la necesidad del uso de las aproximaciones, considera la siguiente situación: se tiene un grupo de 50 niños que se va a dividir en 3 subgrupos A , B y C . Para determinar la cantidad de niños en cada uno de los subgrupos, efectuamos la operación:

$$\text{Número de niños en cada subgrupo} = \frac{50}{3} = 16,666\dots$$

¿Tiene algún significado para tí 16,666... niños? Como 16,666... niños no tiene sentido en este caso y necesitamos tener 3 grupos, procedemos a dividir los niños de la manera siguiente:

Subgrupo A:	16 niños
Subgrupo B:	17 niños
Subgrupo C:	17 niños
Total:	<u>50 niños</u>

Es decir, hemos hecho las siguientes aproximaciones al número racional 16,6:

Subgrupo A	→	16 niños	(Aproximación por defecto)
Subgrupo B	→	17 niños	(Aproximación por exceso)
Subgrupo C	→	17 niños	(Aproximación por exceso)

Considera ahora el número irracional $\pi = 3,141592\dots$. Como este número tiene infinitas cifras, ¿cuántas cifras debemos usar cuando se efectúan operaciones con el mismo? En realidad, mientras más cifras tomemos, el resultado será más exacto; sin embargo, es necesario limitar el número de cifras decimales a utilizar. Veamos varias alternativas con 1, 2 y 3 cifras decimales:

$$\text{a) } 3,141592\dots \begin{cases} 3,1 \text{ (Aproximación por defecto con una cifra decimal)} \\ 3,2 \text{ (Aproximación por exceso con una cifra decimal)} \end{cases}$$

Observa que:

$$3,1 < 3,141592\dots < 3,2$$

$$\text{b) } 3,141592\dots \begin{cases} 3,14 \text{ (Aproximación por defecto con 2 cifras decimales)} \\ 3,15 \text{ (Aproximación por exceso con 2 cifras decimales)} \end{cases}$$

Observa que:

$$3,14 < 3,141592\dots < 3,15$$

$$\text{c) } 3,141592\dots \begin{cases} 3,141 \text{ (Aproximación por defecto con 3 cifras decimales)} \\ 3,142 \text{ (Aproximación por exceso con 3 cifras decimales)} \end{cases}$$

Observa que:

$$3,141 < 3,141592\dots < 3,142$$

A las aproximaciones con 1, 2 o 3 cifras decimales, también se les conoce como *aproximaciones a las décimas, centésimas y milésimas*, respectivamente.

■ EJEMPLO 2.3

Representa sobre la recta numérica el número irracional $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ y sus aproximaciones por defecto y por exceso a las décimas y a las centésimas.

Solución

En la fig. 2.3 se muestra la representación de $\sqrt{2}$, realizada de acuerdo con el procedimiento descrito en el objetivo 1.

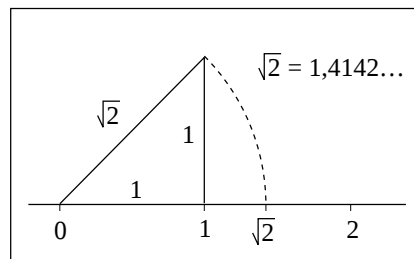


Fig. 2.3 Representación de $\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{ccc}
 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 & \text{(Aproximaciones a las décimas)} \\
 \uparrow \quad \quad \uparrow & \\
 \text{Por defecto} & \text{Por exceso} \\
 \\
 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 & \text{(Aproximaciones a las centésimas)} \\
 \uparrow \quad \quad \uparrow & \\
 \text{Por defecto} & \text{Por exceso}
 \end{array}$$

En la fig. 2.4(a) se representa la aproximación de $\sqrt{2}$ a las décimas y en la fig. 2.4(b) se representa la aproximación de $\sqrt{2}$ a las centésimas. Como puedes ver, a medida que la aproximaciones mejor (décimas, centésimas, milésimas, etc.), nos acercamos más al valor exacto de $\sqrt{2}$.

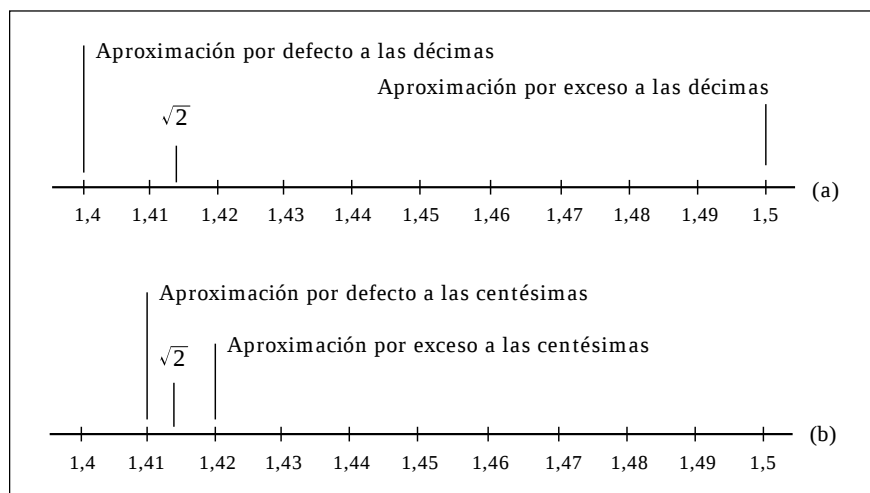


Fig. 2.4 Representación gráfica de $\sqrt{2}$. (a) A las décimas. (b) A las centésimas.

■ EJEMPLO 2.4

Especifica aproximaciones del número irracional $\sqrt{7}$:

- a) A las décimas b) A las centésimas c) A las milésimas

Solución

Mediante una calculadora encontramos que: $\sqrt{7} = 2,645751\dots$

- a) Aproximación a las décimas:

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= 2,6 \text{ (Por defecto)} & \sqrt{7} &= 2,7 \text{ (Por exceso)} \\ 2,6 &< \sqrt{7} < 2,7\end{aligned}$$

- b) Aproximación a las centésimas:

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= 2,64 \text{ (Por defecto)} & \sqrt{7} &= 2,65 \text{ (Por exceso)} \\ 2,64 &< \sqrt{7} < 2,65\end{aligned}$$

- c) Aproximación a las milésimas:

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= 2,645 \text{ (Por defecto)} & \sqrt{7} &= 2,646 \text{ (Por exceso)} \\ 2,645 &< \sqrt{7} < 2,646\end{aligned}$$

■ EJEMPLO 2.5

Dado el número irracional $1,389495\dots$, indica cuáles de los siguientes números son aproximaciones racionales por defecto o por exceso:

- a) 1,3 b) 1,38 c) 1,4 d) 1,39 e) 1,389 f) 1,3894 g) 1,3895

Solución

- a) 1,3 es una aproximación por defecto a las décimas, ya que:

$$1,3 < 1,389495\dots$$

- b) 1,38 es una aproximación por defecto a las centésimas, ya que:

$$1,38 < 1,389495\dots$$

- c) 1,4 es una aproximación por exceso a las décimas, ya que:

$$1,4 > 1,389495\dots$$

- d) 1,39 es una aproximación por defecto a las centésimas, ya que:

$$1,39 > 1,389495\dots$$

e) 1,389 es una aproximación por defecto a las milésimas, ya que:

$$1,389 < 1,389495\dots$$

f) 1,3894 es una aproximación por defecto a las diezmilésimas, ya que:

$$1,3894 < 1,389495\dots$$

g) 1,3895 es una aproximación por exceso a las diezmilésimas, ya que:

$$1,3895 > 1,389495\dots$$

◆ EJERCICIOS

2.5 Representa sobre la recta numérica el número racional 3,1825 con aproximaciones por defecto y por exceso:

- a) A las décimas b) A las centésimas c) A las milésimas

2.6 Representa sobre la recta numérica el número irracional $\sqrt{5}$ y sus aproximaciones por defecto y por exceso a las décimas y las centésimas.

2.7 Indica aproximaciones racionales por defecto y por exceso a los siguientes números reales:

- a) $\frac{1}{\pi}$ (décimas y centésimas) b) $\sqrt{\pi}$ (milésimas)

2.8 Dado el número irracional 0,57358..., indica cuáles de los siguientes números son aproximaciones por defecto y por exceso:

- a) 0,5 b) 0,6 c) 0,57 d) 0,58 e) 0,574
f) 0,573 g) 0,5736 h) 0,5735 i) 0,57358 j) 0,5739
-

3.1 ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

Como ya hemos estudiado, un número real puede ser un número racional (**Q**) o un número irracional (**I**). Por tanto, la adición de números reales puede tener las siguientes variantes:

- Adición de números racionales.
- Adición de un número racional con uno irracional.
- Adición de números irracionales.

3.1.1 Suma de dos números racionales

Un número racional se puede expresar como una fracción o como un número decimal periódico. Son ejemplos de números racionales:

$$\frac{4}{5} \quad \frac{2}{3} \quad 1,05 \quad 0,75$$

En estudios anteriores, se ha estudiado la adición de números racionales expresados en forma de fracción. Así, la adición de $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ está dada por:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12 + 10}{15} = \frac{22}{15} = 1,4666... = 1,4\overline{6}$$

El resultado anterior permite expresar la adición $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ en forma exacta, $\frac{22}{15}$, o en forma aproximada. Esta última forma puede escribirse como:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \left\{ \begin{array}{ll} 1,4 & \text{(Aproximación por defecto a las décimas)} \\ 1,5 & \text{(Aproximación por exceso a las décimas)} \\ 1,46 & \text{(Aproximación por defecto a las centésimas)} \\ 1,47 & \text{(Aproximación por exceso a las centésimas)} \\ 1,466 & \text{(Aproximación por defecto a las milésimas)} \\ 1,467 & \text{(Aproximación por exceso a las milésimas)} \end{array} \right.$$

Es importante recordar que:

El resultado de la suma de dos números racionales es también un número racional.

3.1.2 Suma de un número racional con uno irracional

En este caso se puede establecer:

La adición de un número racional con uno irracional es un número irracional.

Para comprobar lo anterior, considera la adición de $\frac{5}{6}$ y π :

$$\frac{5}{6} + \pi = 0,8333... + 3,1415... = 3,9748... \quad (\text{Número irracional})$$

Indudablemente, hay que tomar una decisión en cuanto al número de cifras decimales que tendrá el resultado. Para ello, debemos hacer aproximaciones. Así, por ejemplo, si se desea una aproximación por defecto de la suma a las centésimas, debemos aproximar por defecto ambos sumandos a las centésimas:

$$\frac{5}{6} + \pi = 0,83 + 3,14 = 3,97$$

Para indicar que la suma anterior es una aproximación, se usa el símbolo $\approx$:

$$\frac{5}{6} + \pi \approx 3,97 \quad (\text{Aproximación por defecto a las centésimas})$$

Ahora bien, si 3,97 es una aproximación a la suma $\frac{5}{6} + \pi$, ¿cómo expresamos el valor exacto? Este es simplemente la expresión indicada de la suma, sin efectuarla:

$$\frac{5}{6} + \pi \quad (\text{Expresión exacta de la suma})$$

3.1.3 Suma de dos números irracionales

La suma de dos números irracionales es un número irracional.

Consideremos la adición de los números irracionales $\sqrt{6} = 2,4494...$ y $\sqrt{11} = 3,3162...$. Las expresiones exacta y aproximada de la suma S son:

$$S = \sqrt{6} + \sqrt{11} \quad (\text{Expresión exacta de la suma})$$

$$S \approx 2,449 + 3,316 = 5,765 \quad (\text{Expresión aproximada por defecto a las milésimas de la suma})$$

Observa que la expresión exacta de la suma es, sencillamente, la indicación de la misma.

3.2 PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

La adición de números reales cumple con las mismas propiedades de la adición de números irracionales. A continuación, estudiamos dichas propiedades:

3.2.1 Propiedad conmutativa: dados los números $a, b \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$a + b = b + a \quad (3.1)$$

Es decir, el orden de los sumandos no altera el valor de la suma. Así:

$$\frac{1}{3} + \sqrt{7} = \sqrt{7} + \frac{1}{3}$$

3.2.2 Propiedad asociativa: dados los números reales $a, b, c \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (3.2)$$

Lo que quiere decir que los sumandos pueden ser agrupados en cualquier orden cuando se efectúa la adición. Así:

$$(\sqrt{3} + 8) + \frac{1}{5} = \sqrt{3} + \left(8 + \frac{1}{5}\right)$$

3.2.3 Elemento neutro: el cero es el elemento neutro de la adición en $\mathbf{R}$ porque, dado $a \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$a + 0 = a \quad (3.3)$$

3.2.4 Elemento simétrico: dado un número $a \in \mathbf{R}$, existe otro número $-a \in \mathbf{R}$ de forma que:

$$a + (-a) = 0 \quad (3.4)$$

El elemento simétrico de la adición recibe también el nombre de *elemento opuesto*. De acuerdo a lo anterior, $-\sqrt{2}$ es el elemento opuesto a $\sqrt{2}$ y tendremos:

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

3.3 SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES

Dado dos números reales a y b , la sustracción $a - b$ se define como la adición de a con el opuesto de b :

$$a - b = a + (-b) \quad (3.5)$$

De acuerdo a lo anterior:

$$\frac{3}{7} - \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{7} + \left(-\frac{1}{8}\right) \quad \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} + (-\sqrt{2})$$

3.4 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES

Cuando se efectúa la adición y sustracción combinadas de números reales, se procede de la misma forma que en el caso de los números racionales. En la práctica se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Se suman los números precedidos de signos positivos. A esta suma parcial la llamamos S_1 .
2. Se suman los números precedidos de signos negativos. A esta suma parcial la llamamos S_2 .
3. Se restan S_1 y S_2 y al resultado se le coloca el signo de la suma parcial con mayor valor absoluto.

■ EJEMPLO 3.1

Efectúa la adición de los siguientes números reales:

a) $S = \frac{4}{7} + \frac{1}{8}$

b) $S = \sqrt{14} + 6$

c) $S = 0,18 + 0,27$

Obtén tanto la forma exacta como la forma aproximada por defecto a las milésimas.

Solución

a) Forma exacta: $S = \frac{4}{7} + \frac{1}{8} = \frac{32 + 7}{56} = \frac{39}{56}$

Forma aproximada a las milésimas:

$$\frac{4}{7} \approx 0,571 \quad \frac{1}{8} = 0,125 \quad \Rightarrow \quad S \approx 0,571 + 0,125 = 0,696$$

b) Forma exacta: $S = \sqrt{14} + 6$

Forma aproximada a las milésimas:

$$\sqrt{14} \approx 3,741 \quad \Rightarrow \quad S \approx 3,741 + 6,000 = 9,741$$

c) Para determinar la forma exacta, determinamos las fracciones generatrices de 0,18 y 0,27:

$$0,18 = \frac{18-1}{90} = \frac{17}{90} \qquad 0,27 = \frac{27}{100}$$

Luego:

$$S = \frac{17}{90} + \frac{27}{100} = \frac{170 + 243}{900} = \frac{413}{900} \quad (\text{Forma exacta})$$

Forma aproximada a las milésimas: $S \approx 0,188 + 0,270 = 0,458$

■ EJEMPLO 3.2

Determina el resultado de las siguientes expresiones con una aproximación por defecto a las diezmilésimas:

a) $S = \frac{3}{5} - 0,2 + \sqrt{12} - 1$

b) $S = -\pi + \sqrt{6} - 0,6157\dots$

Solución

a) $\frac{3}{5} = 0,6000 \qquad 0,2 = 0,2000 \qquad \sqrt{12} = 3,4641 \qquad 1 = 1,0000$

$$S_1 \approx 0,6000 + 3,4641 = 4,0641$$

$$S \approx 4,0641 - 1,2222$$

$$S \approx 2,8419$$

$$S_2 \approx 0,2222 + 1,0000 = 1,2222$$

b) $\pi = 3,1415 \qquad \sqrt{6} = 2,4494$

$$S_2 \approx 3,1415 + 0,6157 = 3,7572$$

$$\Rightarrow S \approx 3,7572 - 2,4494 \Rightarrow S \approx -1,3078$$

$$S_1 \approx 2,4494$$

■ EJERCICIOS

3.1 Efectúa las siguientes operaciones con aproximación por defecto a las centésimas. Escribe, además, el valor exacto del resultado. $\Rightarrow$

a) $\frac{5}{8} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{12} + \frac{10}{6}$

c) $\frac{6}{10} + \frac{11}{20} + \frac{1}{5}$

3.2 Efectúa las operaciones siguientes con aproximación por defecto a las centésimas:

a) $\frac{1}{9} + 1,36$

b) $\frac{2}{9} + \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{3}{4}\pi + \sqrt{7}$

3.3 Determina el resultado de las siguientes operaciones con aproximación por

defecto a las milésimas:

$$\text{a)} -\frac{3}{7} + \frac{1}{5} - 0,8 \qquad \text{b)} -\frac{\pi}{3} + \sqrt{2} - \frac{1}{5} \qquad \text{c)} -0,74 + \sqrt{3} - 0,1736$$

3.4 Escribe los elementos simétricos de los números reales:

$$\text{a)} \sqrt{17} \qquad \text{b)} -\frac{\pi}{4} \qquad \text{c)} \frac{1}{7} \qquad \text{d)} -0,1736$$

4.1 MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

La multiplicación de números reales cumple con los mismos esquemas de la multiplicación en $\mathbf{Q}$. La multiplicación en $\mathbf{R}$ puede tener las siguientes variantes:

- a. Multiplicación de números racionales.
- b. Multiplicación de un número racional con uno irracional.
- c. Multiplicación de números irracionales.

4.1.1 Multiplicación de dos números racionales

La multiplicación de dos números racionales da lugar también a un número racional.

■ EJEMPLO 4.1

Multiplica los siguientes números racionales en sus formas exactas y aproximadas por defecto a las centésimas:

$$\text{a) } \frac{1}{4} \text{ y } \frac{3}{10} \qquad \text{b) } 0,6\overline{2} \text{ y } -\frac{1}{2} \qquad \text{c) } -\frac{3}{5} \text{ y } -0,2\overline{6}$$

Solución

Denotemos al producto por P .

$$\text{a) Forma exacta: } P = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$$

Forma aproximada a las centésimas:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \qquad \frac{3}{10} = 0,30 \qquad \Rightarrow \qquad P \approx (0,25) \cdot (0,30) = 0,07$$

b) Forma exacta: primero escribimos $0,6\overline{2}$ como una fracción:

$$0,6\overline{2} = \frac{62 - 6}{90} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

Luego: $P = \frac{28}{45} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{28}{90} = -\frac{14}{45}$

Forma aproximada a las centésimas:

$$0,6\widehat{2} \approx 0,62 \quad -\frac{1}{2} = -0,50 \quad \Rightarrow \quad P \approx (0,62) \cdot (-0,50) = -0,31$$

c) Forma exacta: primero escribimos $-0,2\widehat{6}$ como una fracción,

$$-0,2\widehat{6} = \frac{26-2}{90} = -\frac{24}{90} = -\frac{12}{45} = -\frac{4}{15}$$

Luego: $P = \left(-\frac{4}{15}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{75} = \frac{4}{25}$

Forma aproximada a las centésimas:

$$-0,2\widehat{6} \approx 0,26 \quad -\frac{3}{5} = -0,60 \quad \Rightarrow \quad P \approx (0,26) \cdot (-0,60) = 0,156$$

Como se trata de una aproximación por defecto a las milésimas: $P \approx 0,15$

4.1.2 Multiplicación de un número racional por uno irracional

La multiplicación de un número racional por uno irracional genera un número irracional.

■ EJEMPLO 4.2

Multiplícalos los siguientes números reales, dando tu respuesta con aproximación por defecto a las milésimas.

a) $\frac{11}{13} \cdot \sqrt{6}$ b) $(0,2756) \cdot (-\sqrt{3})$ c) $\pi \cdot (3,214)$

Solución

a) $\frac{11}{13} \approx 0,846$ $\sqrt{6} \approx 2,449$ $\Rightarrow \quad P \approx 0,846 \cdot 2,449 = 2,071$

b) $0,2756 \approx 0,275$ $-\sqrt{3} \approx -1,732$ $\Rightarrow \quad P \approx 0,275 \cdot (-1,732) = -0,476$

c) $\pi \approx 3,141$ $3,214 = 3,214$ $\Rightarrow \quad P \approx 3,141 \cdot 3,214 = 10,095$

4.1.3 Multiplicación de dos números irracionales

La multiplicación de dos números irracionales genera un número real.

■ EJEMPLO 4.3

Multiplica los siguientes números irracionales:

a) $\pi \cdot \sqrt{\pi}$ b) $(-\sqrt{7}) \cdot (-\sqrt{10})$ c) $(6,4637\dots) \cdot (-0,839\dots)$

Aproximando los resultados por exceso a las milésimas.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \pi \approx 3,142 \quad \sqrt{\pi} \approx 1,773 \quad \Rightarrow \quad P &= 3,142 \cdot (1,773) = 5,570766 \\ P &\approx 5,571 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-\sqrt{7}) \approx -2,646 \quad -\sqrt{10} \approx -3,163 \quad \Rightarrow \quad P &= (-2,646) \cdot (-3,163) = 8,369298 \\ P &\approx 8,370 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 6,4637\dots \approx 6,464 \quad -0,8391\dots \approx -0,840 \quad \Rightarrow \quad P &= 6,464 \cdot (-0,840) = -5,42976 \\ P &\approx -5,430 \end{aligned}$$

4.2 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbf{R}$

La multiplicación en el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$, cumple con las mismas propiedades de la multiplicación en $\mathbf{Q}$. A continuación estudiamos cada una de ellas.

4.2.1 Propiedad conmutativa: dados los números $a, b \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a} \quad (4.1)$$

Es decir, el orden de los factores no altera el resultado de la multiplicación. Así:

$$\frac{3}{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6} \cdot \frac{3}{5}$$

4.2.2 Propiedad asociativa: dados los números $a, b, c \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)} \quad (4.2)$$

Es decir, los factores del producto pueden ser agrupados en cualquier orden cuando se efectúa la multiplicación. Así:

$$(\sqrt{8} \cdot \pi) \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{8} \cdot \left(\pi \cdot \frac{1}{3}\right)$$

4.2.3 Propiedad distributiva: dados los números $a, b, c \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (4.3)$$

Como ejemplo tenemos:

$$\pi \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \pi \cdot \sqrt{2} + \pi \cdot \sqrt{3}$$

4.2.4 Elemento neutro: 1 es el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbf{R}$, porque, dado un número cualquiera $a \in \mathbf{R}$, se cumple:

$$a \cdot 1 = a \quad (4.4)$$

Así, podemos escribir:

$$\pi \cdot 1 = \pi \qquad \sqrt{8} \cdot 1 = \sqrt{8}$$

4.2.5 Elemento simétrico: dado un número $a \in \mathbf{R}$, existe otro número $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ y tal que:

$$(a) \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 \quad (4.5)$$

Al número $\frac{1}{a} = a^{-1}$ de la expresión anterior se le llama *inverso* de a . Así:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ es el elemento simétrico de } \sqrt{2}$$

■ EJEMPLO 4.4

Efectúa la operación indicada haciendo uso de las propiedades de la multiplicación. Aproxima los resultados por defecto a las milésimas:

$$S = \sqrt{5} \cdot (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{3} \cdot 1 + \frac{1}{\pi} \cdot \pi$$

Solución

$$\text{Se tiene:} \qquad \sqrt{5} \approx 2,236 \qquad \sqrt{2} \approx 1,414 \qquad \sqrt{3} \approx 1,732$$

La propiedad distributiva y la existencia de los elementos neutro y simétrico, permiten escribir:

$$\sqrt{5} \cdot (1 - \sqrt{2}) \approx 2,236 \cdot (1 - 1,414) = 2,236 - (2,236) \cdot (1,414) = 2,236 - 3,161 = -0,925$$

$$\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3} \approx 1,732 \qquad \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1,000$$

Luego:

$$S \approx -0,925 + 1,732 + 1,000 = 1,807$$

■ EJEMPLO 4.5

El cuadro que se presenta a continuación describe las propiedades aplicadas en la multiplicación de números reales:

Operación	Propiedad
$(-\sqrt{2}) \cdot 4 = 4 \cdot (-\sqrt{2})$	Conmutativa
$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \pi) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) \cdot \pi$	Asociativa
$(-1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$	Distributiva
$\sqrt{\pi} \cdot 1 = \sqrt{\pi}$	Elemento neutro
$\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$	Elemento simétrico

4.3 LA DIVISIÓN EN $\mathbf{R}$

Dados los números $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}^*$, la división $a \div b$ se define como:

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \quad (4.6)$$

Es decir, es lo mismo dividir a por b que multiplicar a por el inverso de b .

■ EJEMPLO 4.6

Efectúa las siguientes divisiones de números reales:

$$\text{a) } \pi \div \sqrt{2} \qquad \text{b) } 5\sqrt{5} \cdot (1 - \sqrt{7}) \div 0,841$$

Da el resultado con una aproximación por defecto a las milésimas.

Solución

Llamemos D al resultado de las operaciones.

$$\text{a) } \pi \approx 3,141 \quad \sqrt{2} \approx 1,414 \quad D = \pi \div \sqrt{2} \approx 2,221$$

$$\text{b) } \sqrt{5} \approx 2,236 \quad \sqrt{7} \approx 2,645 \quad 5\sqrt{5} \approx 5 \cdot 2,236 = 11,180$$

$$D \approx 11,180 \cdot (1 - 2,645) \div 0,841 \approx (11,180 - 11,180 \cdot 2,645) \div 0,841$$

$$D \approx (11,180 - 29,571) \div 0,841 \approx (-18,391) \div 0,841 \approx -21,868$$

◆ EJERCICIOS

4.1 Multiplica los siguientes números racionales en sus formas exacta y aproximada a las milésimas:

$$\text{a) } \frac{5}{8} \text{ y } \frac{14}{15}$$

$$\text{b) } 1,7\overline{4} \text{ y } -\frac{5}{2}$$

$$\text{c) } -\frac{4}{9} \text{ y } -0,74\overline{5}$$

4.2 Multiplica los siguientes números reales dando tu respuesta por aproximación por defecto a las milésimas:

$$\text{a) } \frac{14}{15} \cdot \sqrt{13}$$

$$\text{b) } (0,327) \cdot (-\sqrt{19})$$

$$\text{c) } 0,28 \cdot \pi$$

4.3 Multiplica los siguientes números irracionales:

$$\text{a) } (-\pi) \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\text{b) } (-\sqrt{20}) \cdot \sqrt{14}$$

$$\text{c) } (-0,7071\dots) \cdot (-1,7317)$$

Aproxima los resultados por defecto a las diezmilésimas.

4.4 Efectúa las operaciones indicadas haciendo uso de las propiedades de la adición y de la multiplicación. Aproxima los resultados por defecto a las diezmilésimas.

$$\text{a) } S = (\pi - \sqrt{2}) \cdot 3 + 4 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 7$$

$$\text{b) } S = \sqrt{8} \cdot 1 - \sqrt{8} \cdot 0$$

$$\text{c) } S = (-2) \cdot \left(\frac{1}{\pi} \cdot \pi + \sqrt{12}\right) + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{1} \cdot \left(6 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{d) } S = \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{5}\right)$$

En todos los casos anteriores menciona las propiedades utilizadas.

4.5 Efectúa las siguientes divisiones de números reales:

$$\text{a) } \pi \div \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \div (-\pi)$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt{2}$$

$$\text{d) } 5\sqrt{6} \div (1 - \sqrt{2})$$

$$\text{e) } (4 - 3\sqrt{2}) \div \left(\frac{3}{4} - \pi\right)$$

$$\text{f) } \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\right) \div \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{8}\right)$$

Da el resultado con una aproximación por defecto a las milésimas.

5.1 POTENCIACIÓN EN $\mathbf{R}$ CON EXPONENTES ENTEROS

Dado un número real a , la multiplicación de a por sí mismo un número determinado de veces, se representa de la siguiente manera:

$$a^2 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ veces } a} \quad a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ veces } a}$$

Para un número natural $n > 0$ cualquiera, se tendrá:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces } a} \quad a \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^+ \quad (5.1)$$

Como recordarás de la potenciación en $\mathbf{Q}$, a es la base, n es el exponente y el resultado de la operación es la potencia P :

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \\ \downarrow \\ (\sqrt{\pi})^3 = \underbrace{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}} \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{Base} \qquad \qquad \text{Potencia} \end{array}$$

Si se calcula $\sqrt{\pi}$ con 3 cifras decimales por defecto y se efectúa la operación anterior:

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{3,141} = 1,772 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{\pi})^3 = (1,772) \cdot (1,772) \cdot (1,772) = 5,564$$

Cuando la base $a > 0$ está precedida por un signo negativo, pueden distinguirse dos soluciones distintas:

$$(-a)^n = a^n \quad \text{si el exponente } n \text{ es par} \quad a \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^+ \quad (5.2)$$

$$(-a)^n = -a^n \quad \text{si el exponente } n \text{ es impar} \quad a \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^+ \quad (5.3)$$

Así tenemos:

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 4^2 = 16$$

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -4^3 = -64$$

$$(-\sqrt{2})^4 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4$$

$$(-\sqrt{2})^5 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^5$$

■ EJEMPLO 5.1

Determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt{2})^3 - \frac{1}{\pi}$

b) $(-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} - 1)$

Solución

a) $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (1,414) \cdot (1,414) \cdot (1,414) = 2,827$ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,141} = 0,318$

Luego: $(\sqrt{2})^3 - \frac{1}{\pi} = 2,827 - 0,318 = 2,509$

b) $(-\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (1,732) \cdot (1,732) = 2,999$ $\sqrt{2} - 1 = 1,414 - 1 = 0,414$

Luego: $(-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} - 1) = 2,999 - 0,414 = 2,585$

◆ EJERCICIOS

En todos los casos aproxima el resultado por defecto a las milésimas.

5.1 Determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) 7^3

b) $(\sqrt{5})^3$

c) π^2

d) $(\sqrt{5})^3 - \pi^2$

e) $(1 - \sqrt{2})^2 \cdot \frac{3}{4}$

f) $\frac{1}{(\sqrt{\pi})^2} - 0,5$

5.2 Determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(-3)^5$

b) $(-3)^4$

c) $(-\sqrt{5})^3 - \pi^3$

d) $(-\sqrt{2})^2 (1 - \sqrt{2})$

e) $(-0,5)^2 + \frac{1}{(\sqrt{\pi})^2}$

5.2 POTENCIACIÓN EN $\mathbf{R}$ CON EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

Dado el número real a ($a \in \mathbf{R}^*$) elevado a un exponente n precedido de signo negativo ($n \in \mathbf{N}^+$), se puede escribir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \in \mathbf{R}^*, \quad n \in \mathbf{N}^+ \quad (5.4)$$

Así:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad (\sqrt{\pi})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$(\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{2})^5} \quad (\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{2})^5}$$

■ EJEMPLO 5.2

Determina el resultado de las siguientes operaciones:

$$\text{a) } \left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \quad \text{b) } (\sqrt{5})^{-1} \quad \text{c) } (\sqrt{\pi} - \sqrt{3})^{-2}$$

La respuesta debe ser dada con 5 cifras decimales.

Solución

$$\text{a) } \left(\frac{5}{9}\right)^2 = 0,55555 \quad \left(\frac{5}{9}\right)^{-2} = \frac{1}{(0,55555)^2} = \frac{1}{0,30863} = 3,24012$$

$$\text{b) } (\sqrt{5})^1 = 2,23606 \quad (\sqrt{5})^{-1} = (2,23606)^{-1} = \frac{1}{2,23606} = 0,44721$$

$$\text{c) } \sqrt{\pi} = \sqrt{3,14159} = 1,77245 \quad \sqrt{3} = 1,73205$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi} - \sqrt{3})^{-2} &= (1,77245 - 1,73205)^{-2} = (0,0404)^{-2} = \frac{1}{(0,0404)^2} = \frac{1}{0,00163} = \\ &= 613,49693 \end{aligned}$$

En este último caso, es conveniente que el estudiante indague qué pasaría si el resultado se hubiese pedido con 2 y 3 cifras decimales.

5.3 POTENCIACIÓN CON EXPONENTE CERO

Dado un número $a \in \mathbf{R}$, distinto de cero, se cumple:

$$\boxed{a^0 = 1} \quad a \neq 0 \quad (5.5)$$

Entonces: $(\sqrt{7})^0 = 1$ $\left(-\frac{1}{\pi}\right)^0 = 1$ $\left(-\frac{1}{1.000}\right)^0 = 1$

5.4 MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Dados $m, n \in \mathbf{Z}$ y $a \in \mathbf{R}$, podemos escribir:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (5.6)$$

Es decir:

Para multiplicar potencias de igual base, se conserva la base común y se suman los exponentes.

Como ejemplos tenemos:

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 \quad \left(-\frac{7}{9}\right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{9}\right)^{4+(-2)} = \left(-\frac{7}{9}\right)^2$$

■ EJEMPLO 5.3

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt{19})^0 - \frac{3}{5}$ b) $\pi^3 \cdot \pi^{-2}$ c) $(\pi - 2)^4 \cdot (\pi - 2)^{-5}$

Solución

a) Como $(\sqrt{19})^0 = 1$, se tiene: $(\sqrt{19})^0 - \frac{3}{5} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$

b) $\pi^3 \cdot \pi^{-2} = \pi^{3+(-2)} = \pi^{3-2} = \pi^1 = \pi$

c) Como la base de la potencia es $(\pi - 2)$, podemos escribir:

$$(\pi - 2)^4 \cdot (\pi - 2)^{-5} = (\pi - 2)^{-1} = \frac{1}{\pi - 2}$$

5.5 DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Dados $m, n \in \mathbf{Z}$ y $a \in \mathbf{R}$, podemos escribir:

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (5.7)$$

La división $a^m \div a^n$ puede también ser indicada como una fracción, luego:

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Es decir:

Para dividir potencias de igual base, se conserva la base común y se restan los exponentes.

Como ejemplos tenemos:

$$\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1$$

$$\frac{(-\pi)^3}{(-\pi)^5} = (-\pi)^{3-5} = (-\pi)^{-2}$$

■ EJEMPLO 5.4

Las siguientes operaciones combinan multiplicación y división de potencias de igual base. Determina la respuesta en forma exacta:

$$\text{a) } \frac{3^7 \cdot \pi^3 \cdot (5\sqrt{2})^4}{\pi \cdot 3^6 \cdot (5\sqrt{2})^2} \quad \text{b) } \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})^4}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^7} \quad \text{c) } \frac{(1 - \pi) \cdot (\pi - 1)^2}{\pi}$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3^7 \cdot \pi^3 \cdot (5\sqrt{2})^4}{\pi \cdot 3^6 \cdot (5\sqrt{2})^2} &= (3^{7-6}) \cdot (\pi^{3-1}) \cdot (5\sqrt{2})^{4-2} = 3^1 \cdot \pi^2 \cdot (5\sqrt{2})^2 = \\ &= 3 \cdot \pi^2 \cdot (25 \cdot 2) = 150\pi^2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})^4}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^7} = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^{1+4-7} = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}$$

c) Como $(1 - \pi) = -(\pi - 1)$ se tiene:

$$\frac{(1 - \pi) \cdot (\pi - 1)^2}{\pi} = \frac{-(\pi - 1) \cdot (\pi - 1)^2}{\pi} = -\frac{(\pi - 1)^3}{\pi}$$

◆ EJERCICIOS

5.3 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{4} - (\sqrt{17})^0$

b) $\frac{\pi^{12} \cdot \pi^{-10}}{\pi}$

c) $(\sqrt{2} + 7)^{-3} \cdot (\sqrt{2} + 7)^2$

5.4 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\pi^{15} \div \pi^{10}$

b) $\pi^{10} \div \pi^{16}$

c) $(a + b)^8 \div (a + b)^{11}$

d) $(\sqrt{11} - \sqrt{3})^{10} \div (\sqrt{11} - \sqrt{3})^{-8}$

e) $(\pi - \sqrt{6})^{-4} \div (\sqrt{6} - \pi)^3$

5.6 POTENCIA DE UN PRODUCTO

Dados los números $a, b, m \in \mathbf{R}$, podemos escribir:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \quad (5.8)$$

Como ejemplos tenemos:

$$(2\sqrt{6})^2 = 2^2(\sqrt{6})^2 = 4 \cdot \sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$$

$$[(1 - \sqrt{10}) \cdot (-1)]^3 = (1 - \sqrt{10})^3 \cdot (-1)^3 = -(1 - \sqrt{10})^3$$

5.7 POTENCIA DE UNA POTENCIA

Dados los números $a, m, n \in \mathbf{R}$, podemos escribir:

$$[(a)^m]^n = a^m \cdot n \quad (5.9)$$

Como ejemplo tenemos:

$$[(-2)^3]^2 = (-2)^3 \cdot 2 = (-2)^6 = 2^6 = 64$$

■ EJEMPLO 5.5

Expresa en forma de potencia de productos las relaciones siguientes:

a) x^3y^9

b) $3^2(\sqrt{2})^6\pi^{12}$

c) $16x^4(\sqrt{7})^8$

Solución

a) El máximo común divisor entre 3 y 9 es 3. Dividiendo cada uno de los exponentes por 3 se tiene:

$$x^3y^9 = (x^1y^3)^3 = (xy^3)^3$$

b) El M.C.D. entre 2, 6 y 12 es 2. Luego: $3^2(\sqrt{2})^6\pi^{12} = [3 \cdot (\sqrt{2})^3\pi^6]^2$

c) Primero escribimos $16 = 2^4$: $16x^4(\sqrt{7})^8 = 2^4x^4(\sqrt{7})^8$

El M.C.D. entre 4 y 8 es 4. Luego: $2^4x^4(\sqrt{7})^8 = [2x(\sqrt{7})^2]^4$

■ EJEMPLO 5.6

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3\sqrt{2})^4$

b) $[(-3)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi^{-3}]^2$

Solución

a) $(3\sqrt{2})^4 = 3^4 \cdot (\sqrt{2})^4 = 81 \cdot \sqrt{16} = 81 \cdot 4 = 324$

b) $[(-3)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi^{-3}]^2 = (-3)^4 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot \pi^{-6} = 81 \cdot \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{1}{\pi^6} = 81 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi^6} = \frac{81}{4\pi^6}$

◆ EJERCICIOS

5.5 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{3^4 \cdot \sqrt{2} \cdot (3\sqrt{3})^2}{3 \cdot (\sqrt{2})^3}$

b) $\frac{(\sqrt{5}-2) \cdot (\sqrt{5}-2)^5}{(\sqrt{5}-2)^7}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-11) \cdot (11-\sqrt{2})^{-2}}{11-\sqrt{2}}$

e) $\frac{(-\sqrt{10}+1)^{-3} \cdot (1-\sqrt{10})}{(1-\sqrt{10})^{-2}}$

5.6 Obtén el resultado de las siguientes expresiones:

a) $(a^2b^3)^3$

b) $(a^2b^5c^{-3})^{-2}$

c) $[(\sqrt{\pi})^2 \cdot (\sqrt{5})^{-1}]^4$

d) $(m \cdot n)^5$

e) $[\frac{1}{7} \cdot (-\sqrt{3})]^2$

f) $[\frac{1}{100^0} \cdot (-3)^a]^2$

5.7 Expresa como potencia de productos las expresiones dadas por:

a) $m^5 n^{10} y^{15}$

b) $32x^4 y^8$

c) $(\sqrt{3})^{-2} \pi^{-4} y^8$

5.8 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5\sqrt{3})^2$

b) $(a^2 b^5 c^{-3})^{-2}$

c) $[(\sqrt{\pi})^2 \cdot (\sqrt{5})^{-1}]^4$

d) $\frac{(a^{-2} b c^3)^5}{a^{-3} b^2 c^5}$

e) $\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{10})^6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{10})^{-4}}{(\sqrt{6} - \sqrt{10})^2}$

5.9 Escribe cada expresión sin exponentes negativos:

a) y^{-3}

b) $x^2 y^{-2} a^3 z^{-4}$

c) $\frac{a^2 b^{-1}}{x^{-1} y^3 z}$

d) $\frac{5^{-1} x^{-7} y^4 z^{-3}}{5^{-2} x^{-5} y^{-6} z}$

e) $\frac{1}{x^{-1} + y^{-1}}$

f) $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} y^{-1}}$

6.1 LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO REAL POSITIVO

Considera el número 16. Dicho número puede ser descompuesto en dos factores iguales, 4:

$$16 = 4 \cdot 4 = 4^2$$

Al factor común, 4, se le llama raíz cuadrada de 16. De la misma forma:

$$25 = 5 \cdot 5 = 5^2 \Rightarrow 5 \text{ es la raíz cuadrada de } 25$$

De acuerdo a lo anterior, también podemos escribir:

4 es la raíz cuadrada de 16 porque $4 \cdot 4 = 16$

5 es la raíz cuadrada de 25 porque $5 \cdot 5 = 25$

10 es la raíz cuadrada de 100 porque $10 \cdot 10 = 100$

Ahora bien, si multiplicamos -4 por -4 , obtenemos 16:

$$(-4) \cdot (-4) = 16 \Rightarrow (-4) \text{ es también raíz cuadrada de } 16$$

De la misma forma:

$$(-5) \cdot (-5) = 25 \Rightarrow (-5) \text{ es también raíz cuadrada de } 25$$

Como ya conoces, el símbolo de la raíz cuadrada de un número es $\sqrt{}$. Entonces, tendremos:

$$\sqrt{16} = \pm 4$$

$$\sqrt{25} = \pm 5$$

$$\sqrt{100} = \pm 10$$

En general, podemos decir:

La raíz cuadrada de un número real no negativo "a" es un número real, positivo o negativo "b" tal que:

$$\sqrt{a} = b \Rightarrow a = b^2 \quad (6.1)$$

■ EJEMPLO 6.1

Resuelve:

a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt{\frac{49}{81}}$

c) $\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{81}{25}}$

En el caso (c) toma el valor positivo de la raíz cuadrada.

Solución

a) $\sqrt{81} = \pm 9$ porque $9 \cdot 9 = 81$ y $(-9) \cdot (-9) = 81$

b) $\sqrt{\frac{49}{81}} = \pm \frac{7}{9}$ porque $\left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81}$ y $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81}$

c) $\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{2}{3} - \frac{9}{5} = \frac{10 - 27}{15} = -\frac{17}{15}$

◆ EJERCICIOS

6.1 Escribe la raíz cuadrada de:

a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt{25}$

c) $\sqrt{121}$

d) $\sqrt{\frac{25}{49}}$

6.2 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{81} + \sqrt{100}$

b) $\sqrt{121} - \sqrt{169}$

c) $\sqrt{\frac{169}{100}}$

d) $\frac{\sqrt{16} + \sqrt{49}}{33}$

e) $\frac{\sqrt{25} - \sqrt{64}}{12}$

f) $\sqrt{\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{25}{64}}$

6.2 RAÍZ N-SIMA DE UN NÚMERO REAL

Considera las siguientes expresiones:

Raíz cuadrada de 100: $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 100$

Raíz cuadrada de 64: $\sqrt{64} = 8$ porque $8^2 = 64$

En general, la raíz n -sima (pronunciado "enésima") de un número real, se escribe como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad (6.2)$$

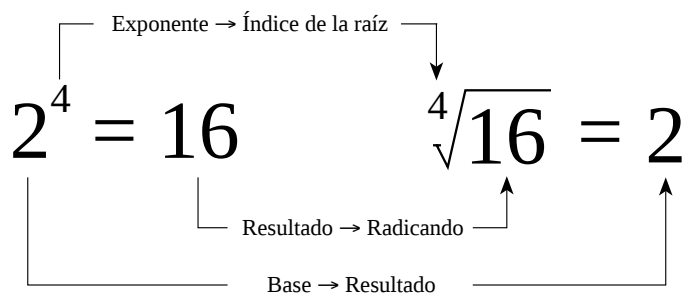
Índice de la raíz ($n \in \mathbb{N}$)

Símbolo de la raíz

Radicando o cantidad subradical ($a \in \mathbb{R}^+$)

Resultado: raíz enésima de a

A la operación de obtener la raíz n -sima de un número se le conoce con el nombre de radicación y es una operación inversa de la potenciación. En efecto, para el caso particular de 24 podemos escribir:



Es decir, en la potenciación se conocen la base y el exponente y se desea obtener la potencia, mientras que en la radicación se desea obtener la base de la potencia (raíz), conocidos el radicando (potencia) y el exponente (índice).

En la relación (6.2) pueden presentarse cuatro casos distintos:

a) Que el índice de la raíz sea par y el radicando positivo: la raíz puede ser positiva o negativa. Como ejemplos tenemos:

$$\sqrt{121} = \pm 11 \qquad \sqrt{12} = \pm 3,464 \qquad \sqrt[6]{64} = \pm 2 \qquad \sqrt[4]{23} = \pm 2,189$$

b) Que el índice de la raíz sea par y el radicando negativo: el resultado es un número que no pertenece a $\mathbf{R}$. Así tenemos:

$$\sqrt{-4} = b \notin \mathbf{R} \quad \text{porque no hay ningún número real tal que } b^2 = -4$$

$$\sqrt[4]{-81} = b \notin \mathbf{R} \quad \text{porque na hay ningún número real tal que } b^4 = 81$$

c) Que el índice de la raíz sea impar y el radicando positivo: el resultado es un número real positivo. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[5]{32} = 2 \qquad \sqrt[1]{7} = 7 \qquad \sqrt[9]{73} = 1,610\dots$$

d) Que el índice de la raíz sea impar y el radicando negativo: el resultado es un número real negativo. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[5]{32} = 2 \qquad \sqrt[1]{7} = 7 \qquad \sqrt[9]{73} = 1,610\dots$$

◆ EJERCICIOS

6.3 Expresa en palabras las siguientes raíces:

a) $\sqrt{11}$

b) $\sqrt[7]{21}$

c) $\sqrt[n]{8}$

d) $\sqrt[6]{2a^{10}}$

6.4 Escribe: a) La raíz cuadrada de 32. b) La raíz quinta de 104. c) La raíz n -sima de dos equis. d) La raíz décima de cinco equis a la cuarta.

6.5 Determina el resultado de las siguientes expresiones y justifica tus respuestas:

a) $\sqrt[5]{1}$

b) $\sqrt[5]{-1}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt[3]{64}$

e) $\sqrt[3]{-64}$

f) $\sqrt{-64}$

g) $\sqrt{-1}$

h) $\sqrt{a^2}$

i) $\sqrt[3]{-23}$

j) $\sqrt[7]{2}$

k) $\sqrt[4]{-12}$

l) $\sqrt[6]{12}$

Utiliza, cuando sea necesario, una calculadora.

6.3 RAÍZ DE UN PRODUCTO. MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE.

La raíz n -sima del producto $a \cdot b$ es igual al producto de la raíz n -sima de a por la raíz n -sima de b .

Simbólicamente lo anterior puede expresarse como:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (6.3)$$

Considera a manera de ejemplo la raíz cuadrada del producto $9 \cdot 25$:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 \cdot 25} &= \sqrt{225} = 15 \\ \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} &= 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{El mismo resultado}$$

Otros ejemplos:

$$\sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{81} = 8 \cdot 9 = 72$$

$$\sqrt[3]{1 \cdot 27 \cdot (-64)} = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{-64} = 1 \cdot 3 \cdot (-4) = -12$$

La relación (6.3) puede expresarse también como:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (6.4)$$

que permite establecer lo siguiente:

Para multiplicar raíces de igual índice, se mantiene el índice común y se multiplican los radicandos.

Como ejemplos podemos citar:

$$\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{18 \cdot 5} = \sqrt[3]{90} = 4,481\dots$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{420} = 20,493\dots$$

$$\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^6} = \sqrt[5]{x \cdot x^3 \cdot x^6} = \sqrt[5]{x^{10}} = x^2$$

$$\sqrt{(x-1)^2} \cdot \sqrt{(x-1)^4} = \sqrt{(x-1)^2 \cdot (x-1)^4} = \sqrt{(x-1)^6} = (x-1)^3$$

6.4 RAÍZ DE UN COCIENTE. DIVISIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE.

La raíz n-sima de un cociente a/b es igual a la raíz n-sima de a dividida por la raíz n-sima de b.

Simbólicamente lo anterior puede expresarse como:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (6.5)$$

Entonces, la relación $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ puede escribirse como:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Otros ejemplos:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{x^6}{y^{12}}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \frac{x^2}{y^4}$$

La relación (6.5) puede expresarse como:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (6.6)$$

Que permite establecer lo siguiente:

Para dividir raíces de igual índice, se conserva el índice común y se dividen los radicandos.

Así tenemos:

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{45}{13}} = \sqrt{3,461...} = 1,860 \quad (3 \text{ cifras decimales})$$

$$\frac{\sqrt[5]{(a+b)}}{\sqrt[5]{(a+b)^{16}}} = \sqrt[5]{\frac{(a+b)}{(a+b)^{16}}} = \sqrt[5]{(a+b)^{-15}} = (a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

■ EJEMPLO 6.2

Multiplica las siguientes raíces de igual índice:

$$\text{a) } \sqrt{25a^3} \cdot \sqrt{4a^5} \qquad \text{b) } \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{15} \qquad \text{c) } \sqrt[5]{(a-x)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-a)^8}$$

Solución

$$\text{a) } \sqrt{25a^3} \cdot \sqrt{4a^5} = \sqrt{(25a^3) \cdot (4a^5)} = \sqrt{100a^8} = 10a^4$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{3 \cdot 2 \cdot 15} = \sqrt[3]{90} = 4,486...$$

$$\text{c) } \text{Primero se ha de observar que: } (a-x)^2 = (x-a)^2.$$

$$\sqrt[5]{(a-x)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-a)^8} = \sqrt[5]{(x-a)^2 \cdot (x-a)^8} = \sqrt[5]{(x-a)^{10}} = (x-a)^2$$

■ EJEMPLO 6.3

Divide las siguientes raíces de igual índice:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{a^7}}{\sqrt{a^3}} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^{12}}} \qquad \text{c) } \frac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{xy^3}} \qquad \text{d) } \frac{\sqrt[5]{(x+y)^2}}{\sqrt[5]{(x+y)^7}}$$

Solución

$$\text{a) } \frac{\sqrt{a^7}}{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\frac{a^7}{a^3}} = \sqrt{a^4} = a^2$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^{12}}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^{12}}} = \sqrt[3]{x^{-9}} = x^{-3}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{xy^3}} = \sqrt{\frac{x^3y}{xy^3}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{x}{y}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt[5]{(x+y)^2}}{\sqrt[5]{(x+y)^7}} = \sqrt[5]{\frac{(x+y)^2}{(x+y)^7}} = \sqrt[5]{(x+y)^{-5}} = (x+y)^{-1} = \frac{1}{(x+y)}$$

■ EJEMPLO 6.4

Simplifica las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^5}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{(x+y)^2}}$$

Solución

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^5}} = \frac{\sqrt{x^3 \cdot x}}{\sqrt{x^5}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{x^5}} = \sqrt{x^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b) Recuerda que: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Luego:

$$\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}} = \sqrt{\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}} = \sqrt{\frac{1}{x-y}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x-y}} = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

c) Como $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ y $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{(x+y)^2}} &= \frac{\sqrt{x+y} \sqrt{(x+y)(x-y)}}{\sqrt{(x+y)(x+y)}} = \frac{\sqrt{(x+y)(x+y)(x-y)}}{\sqrt{(x+y)(x+y)}} = \\ &= \sqrt{\frac{(x+y)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)}} = \sqrt{x-y} \end{aligned}$$

◆ EJERCICIOS

6.6 Multiplica las siguientes raíces de igual índice:

$$\text{a) } \sqrt{100x^3} \cdot \sqrt{x}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{18}$$

$$\text{c)} \sqrt[7]{(x+y)^3} \cdot \sqrt[7]{(x+y)^{11}}$$

$$\text{d)} -5\sqrt{6x^4} \cdot \sqrt{3x}$$

6.7 Divide las siguientes raíces de igual índice:

$$\text{a)} \frac{\sqrt{x^8}}{\sqrt{x^2}}$$

$$\text{b)} \frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a^{-1}}}$$

$$\text{c)} \sqrt{\frac{a^7 b^2}{a^3 b}}$$

$$\text{d)} \frac{\sqrt[4]{(x+y)^3}}{\sqrt[4]{(x+y)^{11}}}$$

$$\text{e)} \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{11}}$$

$$\text{f)} 8\sqrt[3]{9x^5} \div (-2\sqrt[3]{3x})$$

6.8 Simplifica las siguientes expresiones:

$$\text{a)} \frac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{b)} \frac{-3\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^6}}$$

$$\text{c)} \frac{\sqrt{x^0} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$$

$$\text{d)} \frac{4\sqrt[4]{x^7} \cdot \sqrt[4]{x^6}}{8\sqrt[4]{x}}$$

$$\text{e)} \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{\sqrt{x+y}}$$

$$\text{f)} \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x+y}}$$

6.5 RAÍZ DE UNA RAÍZ

Se entiende por raíz de una raíz a expresiones del tipo:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{20}}$$

Para calcular la raíz de una raíz, se multiplican los índices de las raíces y se mantiene la misma cantidad subradical.

Simbólicamente se tiene:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$m, n \in \mathbb{N} \quad (6.7)$$

Para comprobar la relación (6.7) en un caso particular, calculemos la raíz cuadrada de la raíz cuadrada de 16:

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2 \cdot 2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado.

6.6 INTRODUCCIÓN DE FACTORES DENTRO DE UNA RAÍZ

Considera la simplificación de la expresión:

$$\sqrt{a^2x} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{x} = a\sqrt{x}$$

Hemos establecido entonces que:

$$a\sqrt{x} = \sqrt{a^2x}$$

En general, podemos establecer:

Para introducir un factor dentro de un radical, se eleva dicho factor a un exponente igual al índice de la raíz.

Como ejemplo tenemos:

$$x^2 \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(x^2)^3 b} = \sqrt[3]{x^6 b}$$

$$a\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 a^3} = \sqrt{a^5}$$

$$3b \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{3^4 b^4 a^3} = \sqrt[4]{81 a^3 b^4}$$

$$ab \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 a}{b}} = \sqrt{a^3 b}$$

◆ EJERCICIOS

6.9 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{12}}}$

6.10 Introduce los factores externos dentro del símbolo de raíz:

a) $x\sqrt{y}$

b) $2\sqrt[3]{a^2b}$

c) $xy\sqrt{2}$

d) $3a\sqrt[5]{x^2}$

6.7 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Considera la expresión $\sqrt[4]{x^8}$:

$$\sqrt[4]{x^8} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^4} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^4} = x \cdot x = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{x^8} = x^2$$

Este mismo resultado pudo obtenerse dividiendo el índice de la raíz y el exponente de la cantidad subradical por 4:

$$4 \div 4 \sqrt[4]{x^{8 \div 4}} = x^2$$

En forma general, podemos establecer:

El valor de una raíz no se altera si se dividen el índice y el exponente del radicando por un mismo número.

Así tenemos:

$$\sqrt[4]{x^2y^4} = \sqrt{xy^2} \quad (\text{División por 2})$$

$$\sqrt[6]{4x^6y^8} = \sqrt[6]{2^2x^6y^8} = \sqrt[3]{2x^3y^4} \quad (\text{División por 2})$$

$$\sqrt[15]{2^5x^{10}} = \sqrt[3]{2x^2} \quad (\text{División por 5})$$

En general se puede demostrar que:

Para simplificar un radical, se divide el índice de la raíz y los exponentes de la cantidad subradical por el m.c.d. de los mismos.

6.8 AMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Considera ahora las siguientes expresiones:

$$\sqrt{3^2} \quad (1) \qquad \sqrt[4]{3^4} \quad (2) \qquad \sqrt[6]{3^6} \quad (3)$$

En los tres casos anteriores el resultado es el mismo. En el caso (2), tanto el índice de la raíz como el exponente del radicando de la expresión (1) han sido multiplicados por 2, mientras que en el caso (3) han sido multiplicados por 3. En general, se puede demostrar que:

El valor de una raíz no se altera si se multiplican el índice y los exponentes de la cantidad subradical por el mismo número.

Así:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[9]{a^6b^3} & \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = \sqrt[20]{2^{20}} = \sqrt[35]{2^{35}} = 2 \\ \text{Multiplicación} & \text{Multiplicación} & \text{Multiplicación} \\ \text{por 2} & \text{por 3} & \text{por 4} \quad \text{Multiplicación} \\ & & \text{por 7} \end{array}$$

6.9 EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UNA RAÍZ

Considera la expresión $\sqrt[3]{a^{13}}$:

$$\sqrt[3]{a^{13}} = \sqrt[3]{a^{12} \cdot a} = \sqrt[3]{a^{12}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^4 \sqrt[3]{a}$$

Lo que indica que parte de la cantidad subradical ha salido del signo de la raíz. El proceso anterior puede hacerse más rápido dividiendo el exponente del radicando

por el índice de la raíz:

$$\begin{array}{ccc}
 & 13 & \overline{) 3} \\
 & 1 & 4 \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \text{A este exponente se eleva} & & \text{A este exponente se eleva} \\
 \text{la cantidad que queda} & & \text{la cantidad que sale} \\
 \text{dentro del radical (Residuo).} & & \text{del radical (Cociente).}
 \end{array}$$

En general se puede demostrar que:

Para extraer un factor de una raíz, se divide el exponente del radicando por el índice de la raíz. El cociente será el exponente de la cantidad que se extrae del radical, mientras que el residuo será el exponente de la cantidad que queda dentro del radical.

■ EJEMPLO 6.5

Extrae los factores que puedas de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[4]{x^{18}}$

b) $\sqrt[3]{x^7 y^5}$

c) $\sqrt{x^3(x+y)^5}$

Solución

a) Al dividir 18 por 4, obtenemos: $18 \div 4 = 4$ (Residuo 2)

Luego:

$$\sqrt[4]{x^{18}} = x^4 \sqrt[4]{x^2} = x^4 \sqrt{x}$$

b) Se tiene: Para $x \Rightarrow 7 \div 3 = 2$ (Residuo 1)

Para $y \Rightarrow 5 \div 3 = 1$ (Residuo 2)

Entonces:

$$\sqrt[3]{x^7 y^5} = x^2 y \sqrt[3]{xy^2}$$

c) Se tiene: Para $x \Rightarrow 3 \div 2 = 1$ (Residuo 1)

Para $(x+y)^5 \Rightarrow 5 \div 2 = 2$ (Residuo 1)

Luego:

$$\sqrt{x^3(x+y)^5} = x(x+y)^2 \sqrt{x(x+y)}$$

6.10 REDUCCIÓN DE RADICALES A UN MISMO ÍNDICE

Cuando se tienen que efectuar operaciones con radicales, a veces es conveniente reducirlos todos a un índice común. Para reducir un grupo de radicales a un mismo índice, se procede de la manera siguiente:

1. Se determina el mínimo común múltiplo de los índices. Este será el índice común de las raíces o mínimo común índice (m.c.i.).
2. Se divide el m.c.i. entre cada una de los índices de las raíces dadas.
3. Se eleva cada radicando al resultado de la división anterior.

■ EJEMPLO 6.6

Determina el mínimo común índice de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt{a^2b}$; $\sqrt[5]{a}$; $\sqrt[4]{ab^3}$

Solución

a) El mínimo común múltiplo entre 2, 3 y 4 es 12. Luego:

$$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4}$$

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3}$$

b) El mínimo común múltiplo entre 2, 5 y 4 es 20. Luego:

$$\sqrt{a^2b} = \sqrt[20]{(a^2)^{10}b^{10}} = \sqrt[20]{a^{20}b^{10}}$$

$$\sqrt[5]{a} = \sqrt[20]{a^4}$$

$$\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[20]{a^5(b^3)^5} = \sqrt[20]{a^5b^{15}}$$

■ EJEMPLO 6.7

Multiplique los siguientes radicales, expresándolos con un índice común:

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{12}$

b) $\sqrt{xy^3} \cdot \sqrt[5]{x^3y}$

Solución

$$\text{a) m.c.i.} = 6 \quad \begin{cases} \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^3} = 2 \sqrt[6]{2^3} \\ \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{4 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^2} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2} \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{12} &= (2 \sqrt[6]{2^3}) \cdot \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2} = 2 \sqrt[6]{2^7 \cdot 3^2} = 2 \sqrt[6]{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2} = \\ &= 2 \cdot 2 \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = 4 \sqrt[6]{18} \end{aligned}$$

$$\text{b) m.c.i.} = 10 \quad \begin{cases} \sqrt{xy^3} = \sqrt[10]{(xy^3)^5} = \sqrt[10]{x^5y^{15}} \\ \sqrt[5]{x^3y} = \sqrt[10]{(x^3y)^2} = \sqrt[10]{x^6y^2} \end{cases}$$

Luego:

$$\sqrt{xy^3} \cdot \sqrt[5]{x^3y} = \sqrt[10]{x^5y^{15}} \cdot \sqrt[10]{x^6y^2} = \sqrt[10]{x^{11} \cdot y^{17}} = xy \sqrt[10]{xy^7}$$

■ EJEMPLO 6.8

Efectúa las siguientes divisiones de radicales de diferentes índices:

a) $\frac{2\sqrt[3]{2x^5}}{\sqrt{x}}$

b) $\frac{\sqrt[5]{x^2y^3}}{\sqrt[4]{x^5y^2}}$

Solución

a) El m.c.i. entre 3 y 2 es 6 y por lo tanto:

$$2\sqrt[3]{2x^5} = 2\sqrt[6]{2^2x^{10}}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$$

Luego:

$$\frac{2\sqrt[3]{2x^5}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt[6]{2^2x^{10}}}{\sqrt[6]{x^3}} = 2\sqrt[6]{\frac{2^2x^{10}}{x^3}} = 2\sqrt[6]{4x^7} = 2x\sqrt[6]{4x}$$

b) El m.c.i. entre 5 y 4 es 20, por lo que el numerador y el denominador pueden escribirse como:

$$\sqrt[5]{x^2y^3} = \sqrt[20]{x^8y^{12}}$$

$$\sqrt[4]{x^5y^2} = \sqrt[20]{x^{25}y^{10}}$$

Luego:

$$\frac{\sqrt[5]{x^2y^3}}{\sqrt[4]{x^5y^2}} = \frac{\sqrt[20]{x^8y^{12}}}{\sqrt[20]{x^{25}y^{10}}} = \sqrt[20]{\frac{x^8y^{12}}{x^{25}y^{10}}} = \sqrt[20]{x^{-17}y^2} = \sqrt[20]{\frac{y^2}{x^{17}}}$$

◆ EJERCICIOS

6.11 Extrae los factores que puedas de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{a^{16}}$

b) $\sqrt[5]{x^8y^{10}}$

c) $\sqrt{(a+b)^7x^3}$

6.12 Determina el m.c.i. de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{3}; \sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt{xy}; \sqrt[5]{x^2y^3}; \sqrt[3]{a^2b}$

6.13 Determina el resultado de las siguientes operaciones, expresándolos con un índice común:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{a^2b^2} \cdot \sqrt[7]{ab}$

c) $\frac{x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^5}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}$

7.1 POTENCIA DE UN NÚMERO REAL CON EXPONENTE RACIONAL

En la sección 6.9 estudiamos que para extraer un factor de una raíz se divide el exponente del radicando por el índice de dicha raíz. En el caso particular de divisiones exactas, la raíz desaparece:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2^1 = 2 \qquad \sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$$

Invirtiendo el procedimiento anterior podemos escribir:

$$3 \sqrt[4]{a^2} \qquad x^{6/2} = \sqrt{x^6}$$

En general, una potencia de un número real a elevada a un número racional $\frac{m}{n}$, puede expresarse como una raíz. Esto es:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (7.1)$$

La única restricción en la relación anterior es que el resultado pertenezca al conjunto $\mathbf{R}$. Como ejemplos tenemos:

$$2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3} \qquad x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \qquad (x^2y)^{2/7} = \sqrt[7]{(x^2y)^2} \qquad a^{-1/4} = \sqrt[4]{a^{-1}}$$

■ EJEMPLO 7.1

Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^{3/2} y^{5/2}}{xy}$

b) $\frac{\sqrt{a^9} a^{7/2}}{\sqrt{a}}$

Solución

a) La expresión puede tratarse como producto y división de potencias de igual base:

$$\frac{x^{3/2} y^{5/2}}{xy} = x^{3/2-1} y^{5/2-1} = x^{1/2} y^{3/2}$$

Transformando a raíces: $x^{1/2} y^{3/2} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{xy^3} = y\sqrt{xy}$

b) $\frac{\sqrt{a^9} a^{7/2}}{\sqrt{a}} = \frac{a^{9/2} a^{7/2}}{a^{1/2}} = \frac{a^{16/2}}{a^{1/2}} = a^{15/2} = \sqrt{a^{15}} = a^7 \sqrt{a}$

■ EJEMPLO 7.2

Simplifica las siguientes expresiones convirtiendo los radicales a potencias de exponentes fraccionarios:

$$\text{a) } \frac{x \sqrt{x^5 y}}{\sqrt[3]{x} \sqrt[4]{y^3}}$$

$$\text{b) } \frac{(-a^2 b) \sqrt[5]{ab}}{\sqrt[3]{ab^2}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x \sqrt{x^5 y}}{\sqrt[3]{x} \sqrt[4]{y^3}} &= \frac{x x^{5/2} y^{1/2}}{x^{1/3} y^{3/4}} = \frac{x^{7/2} y^{1/2}}{x^{1/3} y^{3/4}} = x^{7/2 - 1/3} y^{1/2 - 3/4} = x^{(21-2)/6} y^{(2-3)/4} = \\ &= x^{19/6} y^{-1/4} = \frac{x^{19/6}}{y^{1/4}} = \frac{\sqrt[6]{x^{19}}}{\sqrt[4]{y}} = \frac{x^3 \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(-a^2 b) \sqrt[5]{ab}}{\sqrt[3]{ab^2}} &= \frac{(-a^2 b)(ab)^{1/5}}{a^{1/3} b^{2/3}} = \frac{(-a^2 b) a^{1/5} b^{1/5}}{a^{1/3} b^{2/3}} = - \frac{a^{2 + 1/5} b^{1 + 1/5}}{a^{1/3} b^{2/3}} = - \frac{a^{11/5} b^{6/5}}{a^{1/3} b^{2/3}} = \\ &= - a^{11/5 - 1/3} b^{6/5 - 2/3} = - a^{(33-5)/15} b^{(18-10)/15} = - a^{28/15} b^{8/15} = - \sqrt[15]{a^{28} b^8} = \\ &= - a \sqrt[15]{a^{13} b^8} = - a \sqrt[15]{a^{13} b^8} \end{aligned}$$

◆ EJERCICIOS

7.1 Transforma en potencias las siguientes raíces:

$$\text{a) } \sqrt{x^9}$$

$$\text{b) } \sqrt[7]{a^3}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{ab^2}$$

7.2 Transforma en raíces las siguientes potencias:

$$\text{a) } x^{1/3}$$

$$\text{b) } a^{4/5}$$

$$\text{c) } 2^{-3/10}$$

7.3 Simplifica las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{x^{1/3}}{xy}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{a^7} a^{1/3}}{a^2}$$

$$\text{c) } \frac{a^{-3/4} b^{1/2}}{ab}$$

7.4 Simplifica las siguientes expresiones convirtiendo los radicales a potencias de exponentes fraccionarios:

$$\text{a) } \frac{a \sqrt[5]{a^2 y^3}}{ay^2}$$

$$\text{b) } \frac{(xy)^2 \sqrt{(xy)^5}}{(xy)^{-1/2}}$$

$$\text{c) } \frac{ab^{-1/3} \sqrt{ab}}{a^{1/2} \sqrt[3]{b^3}}$$

7.2 EJERCICIOS ADICIONALES SOBRE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

En los ejemplos siguientes se utilizan las propiedades de la radicación en $\mathbf{R}$ para obtener versiones simplificadas de las expresiones dadas.

■ EJEMPLO 7.3

Simplifica las expresiones:

a) $\frac{\sqrt[3]{xy^2} \sqrt[3]{x^2y^2}}{x^{5/2}}$

b) $\frac{x^{1/3} \sqrt[3]{\sqrt{x^2y}}}{y^{1/2}}$

c) $\frac{(a+b)^{1/2} \sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{\sqrt{a+b}}}$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sqrt[3]{xy^2} \sqrt[3]{x^2y^2}}{x^{5/2}} &= \frac{x^{1/3} y^{2/3} x^{2/3} y^{2/3}}{x^{5/2}} = x^{1/3+2/3-5/2} y^{2/3+2/3} = x^{-3/2} y^{4/3} = \\ &= \frac{y^{4/3}}{x^{3/2}} = \frac{\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt{x^3}} = \frac{y\sqrt[3]{y}}{x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^{1/3} \sqrt[3]{\sqrt{x^2y}}}{y^{1/2}} &= \frac{x^{1/3} \sqrt[6]{x^2y}}{y^{1/2}} = \frac{x^{1/3} x^{2/6} y^{1/6}}{y^{1/2}} = x^{1/3+2/6} y^{1/6-1/2} = x^{2/3} y^{-1/3} = \\ &= \frac{x^{2/3}}{y^{1/3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{(a+b)^{1/2} \sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{\sqrt{a+b}}} &= \frac{(a+b)^{1/2} (a+b)^{3/2}}{(a+b)^{1/4}} = (a+b)^{1/2+3/2-1/4} = (a+b)^{7/4} = \\ &= \sqrt[4]{(a+b)^7} = (a+b) \sqrt[4]{(a+b)^3} \end{aligned}$$

◆ EJERCICIOS

7.5 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sqrt{x^3y} \sqrt[3]{x^2y^5}}{x^{1/2}}$

b) $\frac{\sqrt{a} \sqrt{\sqrt{a}}}{a}$

c) $\frac{\sqrt{(a+b)} \sqrt[3]{a+b}}{(a+b)^{-1/4}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{x \sqrt{x}} y^{1/5}}{\sqrt{xy}}$

e) $\frac{\sqrt{\sqrt{a^2b}} \sqrt[5]{ab^2}}{\sqrt[3]{x^{1/2}}}$

f) $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} x^{-3/2}$

7.3 RADICALES SEMEJANTES

Radicales semejantes son aquellos que, expresados en su forma más simple, tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Son ejemplos de radicales semejantes:

a) $\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$ (Índice 2, cantidad subradical 2)

b) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{4}, -\sqrt[5]{4}, 2\sqrt[5]{4}$ (Índice 5, cantidad subradical 4)

Hay radicales que a primera vista pueden parecer no semejantes. Por ejemplo, los radicales $\sqrt{32}$ y $\sqrt{18}$ al no tener la misma cantidad subradical pudiesen ser tomados como no semejantes. Sin embargo, si estos radicales se expresan en su forma más simple tendremos:

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \qquad \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Es decir, $\sqrt{32}$ y $\sqrt{18}$ si son radicales semejantes.

■ EJEMPLO 7.4

Determina si los siguientes radicales son semejantes:

a) $\sqrt{50}$ y $\sqrt{98}$

b) $\sqrt{a}$ y $3\sqrt[4]{a^2}$

c) $3\sqrt{72}$ y $\sqrt{48}$

Solución

a) Descomponiendo 50 y 98 en sus factores primos:

50	2	98	2	$50 = 2 \cdot 5^2$
25	5	49	7	
5	5	7	7	
1		1		

$98 = 2 \cdot 7^2$

Luego:

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$\sqrt{50}$ y $\sqrt{98}$ son radicales semejantes

$$\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$$

b) $3\sqrt[4]{a^2}$ puede escribirse como: $3\sqrt[4]{a^2} = 3\sqrt{a}$.

Luego, como $\sqrt{a}$ y $3\sqrt{a}$ son radicales semejantes, $\sqrt{a}$ y $3\sqrt[4]{a^2}$ son también radicales semejantes.

c) Descomponiendo 72 y 48 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 \end{array}$$

Luego:

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \qquad \sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2 \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Como las cantidades subradicales no son iguales, $\sqrt{72}$ y $\sqrt{48}$ no son radicales semejantes.

7.4 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES SEMEJANTES

Para efectuar la adición y sustracción de radicales semejantes, basta con sumar algebraicamente los coeficientes que acompañan a los mismos. Los ejemplos que siguen ilustran la manera de proceder.

■ EJEMPLO 7.5

Determina el resultado de las operaciones siguientes:

$$\text{a) } \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \qquad \text{b) } \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \text{c) } \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x} \qquad \text{d) } 3\sqrt{50} - 5\sqrt{98}$$

Solución

$$\text{a) } \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (1 + 2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(1 - 7 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = -\frac{11}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{x^5} \text{ puede expresarse como: } \sqrt[4]{x^5} = x \sqrt[4]{x}$$

Luego:

$$\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x} = x \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} = (x + 1) \sqrt[4]{x}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 3\sqrt{50} - 5\sqrt{98} &= 3\sqrt{5^2 \cdot 2} - 5\sqrt{7^2 \cdot 2} = 3 \cdot 5\sqrt{2} - 5 \cdot 7\sqrt{2} = \\ &= 15\sqrt{2} - 35\sqrt{2} = -20\sqrt{2} \end{aligned}$$

■ EJEMPLO 7.6

Efectúa las operaciones siguientes:

$$\text{a)} \quad 2 - 3\sqrt{50} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{72}$$

$$\text{b)} \quad 2\sqrt{3x} - 3\sqrt{108x} + 5\sqrt{27x}$$

Solución

$$\text{a)} \quad \text{Tenemos:} \quad \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \qquad \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Luego:} \quad 2 - 3\sqrt{50} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{72} = 2 - 3 \cdot 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{2} =$$

$$= 2 - 15\sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = (2 + \frac{1}{2}) - (15 + \frac{3}{2})\sqrt{2} = \frac{5}{2} - \frac{33}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{b)} \quad \text{Se tiene:} \quad \sqrt{108x} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 x} = 2 \cdot 3\sqrt{3x} = 6\sqrt{3x} \qquad \sqrt{27x} = \sqrt{3^3 x} = 3\sqrt{3x}$$

$$2\sqrt{3x} - 3\sqrt{108x} + 5\sqrt{27x} = 2\sqrt{3x} - 3 \cdot 6\sqrt{3x} + 5 \cdot 3\sqrt{3x} =$$

$$= 2\sqrt{3x} - 18\sqrt{3x} + 15\sqrt{3x} = (2 - 18 + 15)\sqrt{3x} = -\sqrt{3x}$$

◆ EJERCICIOS

7.6 Determina si los siguientes radicales son semejantes:

$$\text{a)} \quad \sqrt{108a^3} \text{ y } \sqrt{27a^3}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt[6]{4} \text{ y } 2\sqrt{2}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt[3]{a}, -\sqrt[3]{8a} \text{ y } \sqrt[6]{a^4}$$

$$\text{d)} \quad -5\sqrt{80} \text{ y } \frac{1}{4}\sqrt{180}$$

7.7 Efectúa las operaciones indicadas:

$$\text{a)} \quad 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{24} + 3\sqrt{3}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt[5]{x^7} - 2\sqrt[10]{x^{14}} + 3\sqrt[5]{x^7}$$

$$\text{d)} \quad -5\sqrt{80} \text{ y } \frac{1}{4}\sqrt{180}$$

8.1 RACIONALIZACIÓN DE FRACCIONES CON NUMERADORES O DENOMINADORES MONÓMICOS

La racionalización es un procedimiento que permite eliminar las raíces que figuran en el numerador o en el denominador de una fracción. La fracción resultante es equivalente a la original. Los ejercicios que siguen ilustran la forma de proceder.

■ EJEMPLO 8.1

Racionaliza las siguientes fracciones monómicas:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $\frac{-7}{5\sqrt[3]{a^2}}$

Solución

a) A fin de eliminar la raíz en el denominador, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt{5}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Observa que al multiplicar el denominador y el numerador por la misma cantidad, la fracción no se altera y que el radical desapareció del denominador. Aparece ahora en el numerador. En general, *para racionalizar una fracción se multiplican tanto el numerador como el denominador por una raíz del mismo índice cuya cantidad subradical posea la misma base y cuyo exponente sea la cantidad que falta para alcanzar el índice o un múltiplo de éste.*

b) ¿Por qué cantidad hay que multiplicar $\frac{(\sqrt[3]{3})}{3}$ para que desaparezca el radical en el numerador? En este caso hay que multiplicar por $\sqrt[3]{3^2}$:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{3} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}}{3 \sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3 \sqrt[3]{9}} = \frac{3}{3 \sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

c) Para eliminar el radical del denominador multiplicamos la fracción por $\sqrt[3]{a}$:

$$\frac{-7}{5\sqrt[3]{a^2}} = \frac{-7}{5\sqrt[3]{a^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = -\frac{7\sqrt[3]{a}}{5\sqrt[3]{a^3}} = -\frac{7\sqrt[3]{a}}{5a}$$

■ EJEMPLO 8.2

Elimina el radical del numerador o denominador en las siguientes fracciones monómicas:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{x^2y} \qquad \text{c) } \frac{5x}{\sqrt[5]{15x^2}}$$

Solución

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{x^2y} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{x^2y} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{x^2y}} = \frac{\sqrt[3]{x^3y^3}}{x^2y\sqrt[3]{x^2y}} = \frac{xy}{x^2y\sqrt[3]{x^2y}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{xy}}$$

$$\text{c) } \frac{5x}{\sqrt[5]{15x^2}} = \frac{5x}{\sqrt[5]{15x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{15^4x^3}}{\sqrt[5]{15^4x^3}} = \frac{5x\sqrt[5]{15^4x^3}}{x^2y\sqrt[5]{15^5x^5}} = \frac{5x\sqrt[5]{15^4x^3}}{15x} = \frac{\sqrt[5]{15^4x^3}}{3}$$

◆ EJERCICIOS

8.1 Racionaliza las siguientes fracciones monómicas:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{b) } -\frac{1}{\sqrt{7}} & \text{c) } \frac{5}{\sqrt{15}} & \text{d) } \frac{2x}{\sqrt{8x}} \\ \text{e) } \frac{xy\sqrt{xy}}{4} & \text{f) } \frac{x}{2\sqrt{x^3y}} & \text{g) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & \text{h) } \frac{x^{3/4}y^{1/2}}{xy} \end{array}$$

8.2 RACIONALIZACIÓN DE FRACCIONES CON NUMERADORES O DENOMINADORES BINÓMICOS

Como ejemplos de fracciones con numeradores y denominadores binómicos tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+3} \qquad \frac{\sqrt[3]{2}+1}{4} \qquad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

A fin de racionalizar fracciones con denominadores o numeradores binómicos es conveniente recordar el producto notable:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Al factor $(a-b)$ se le conoce como **conjugado** de $(a+b)$ y viceversa.

Para racionalizar fracciones con numeradores o denominadores binómicos, se multiplica por el conjugado del numerador o el denominador, según sea el caso.

■ EJEMPLO 8.3

Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

b) $\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$

c) $\frac{4}{\sqrt{x+2} - 1}$

Solución

a) Multipliquemos numerador y denominador por $\sqrt{x} - 1$, que es el conjugado de $\sqrt{x} + 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

donde se ha usado el producto notable:

$$(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = \sqrt{x^2} - 1 = x - 1$$

b) El conjugado de $\sqrt{3} + 2$ es $\sqrt{3} - 2$, por tanto:

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3} - 2)} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3} - 2)} = \frac{3 - 4}{2(\sqrt{3} - 2)} = -\frac{1}{2(\sqrt{3} - 2)}$$

c) El conjugado de $\sqrt{x+2} - 1$ es $\sqrt{x+2} + 1$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{x+2} - 1} &= \frac{4}{\sqrt{x+2} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + 1)}{(\sqrt{x+2} + 1)} = \frac{4(\sqrt{x+2} + 1)}{(\sqrt{x+2})^2 - 1^2} = \\ &= \frac{4(\sqrt{x+2} + 1)}{x + 2 - 1} = \frac{4\sqrt{x+2} + 4}{x + 1} \end{aligned}$$

■ EJEMPLO 8.4

Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$

b) $\frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} + 1}$

Solución

a) Multiplicando el numerador y el denominador por $2\sqrt{x} - 1$, se tiene:

$$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{(2\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{2(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}}{4x - 1} = \frac{2x - \sqrt{x}}{4x - 1}$$

b) Multipliquemos numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x-1} + 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} + 1} &= \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} - 1} = \frac{(\sqrt{x-1} - 1)^2}{\sqrt{(x-1)^2} - 1^2} = \\ &= \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1}{x - 1 - 1} = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{x - 2} \end{aligned}$$

◆ EJERCICIOS

8.2 Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{1 - \sqrt{x}}$

b) $\frac{\sqrt{3} - 2}{5}$

c) $\frac{6}{5\sqrt{2} - 3}$

d) $\frac{\sqrt{x+1} - 3}{2}$

e) $\frac{4}{7 - 3\sqrt{2}}$

f) $\frac{8(\sqrt{x} - 3)}{12}$

8.3 Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

b) $\frac{1 - 2\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}}$

c) $\frac{2}{3 - 2\sqrt{1-x}}$

d) $\frac{5 - 2\sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

f) $\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}}$

9.1 RELACIONES DE ORDEN "MAYOR QUE" Y "MENOR QUE" EN LOS NÚMEROS REALES

Considera la recta numérica mostrada en la fig. 9.1. Como ya hemos establecido cuando se estudiaron las relaciones de orden en $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$, los números situados a la derecha son mayores que los situados a la izquierda.

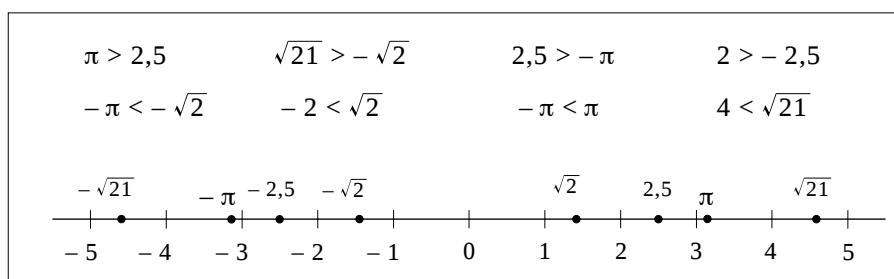


Fig. 9.1 Cualquier número del conjunto $\mathbf{R}$ es mayor que los números situados a su izquierda.

Así, por ejemplo, π está situado a la derecha de $2,5$ y decimos que π es mayor que $2,5$. De la misma forma, $\sqrt{2}$ está situado a la derecha de -2 y por tanto $\sqrt{2}$ es mayor que -2 . En general podemos decir:

Dados los números p y q que pertenecen a $\mathbf{R}$, p es mayor que q si está situado a la derecha de este último sobre la recta numérica.

A fin de expresar que p es mayor que q , escribimos:

$$p > q \quad p, q \in \mathbf{R} \quad (9.1)$$

donde el símbolo $>$ significa "mayor que". De igual manera puede establecerse que:

Dados los números p y q que pertenecen a $\mathbf{R}$, p es menor que q si está situado a la izquierda de este último sobre la recta numérica.

Para expresar que un número cualquiera p es menor que otro número q , escribimos:

$$p < q \quad p, q \in \mathbf{R} \quad (9.2)$$

donde el símbolo $<$ significa "menor que". A los símbolos $>$ y $<$ se les conoce

como *signos de desigualdad* y a las expresiones (9.1) y (9.2) se les llama *desigualdades*.

De la recta numérica podemos deducir:

- *Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.*
- *Cualquier número negativo es menor que cualquier número positivo.*

También hay que notar que decir que p es mayor que q es equivalente a decir que q es menor que p . Esto es:

$$p > q \quad \Rightarrow \quad q < p \quad (9.3)$$

Así,

$$\sqrt{21} > -2 \quad \text{es equivalente a} \quad -2 < \sqrt{21}$$

$$\pi > 2,5 \quad \text{es equivalente a} \quad 2,5 < \pi$$

Las relaciones (9.3) pueden expresarse de otra forma. Si $p > q$, la diferencia $p - q$ es mayor que cero. También, si $q < p$, la diferencia $q - p$ es menor que cero:

$$p > q \quad \Rightarrow \quad p - q > 0 \quad (9.4)$$

$$q < p \quad \Rightarrow \quad q - p < 0 \quad (9.5)$$

Por ejemplo,

$$p > 2,5 \quad \Rightarrow \quad p - 2,5 > 0$$

$$4 < \sqrt{21} \quad \Rightarrow \quad 4 - \sqrt{21} < 0$$

■ EJEMPLO 9.1

Ordena en forma creciente y decreciente los siguientes números reales usando los símbolos $<$ y $>$:

$$-\sqrt{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad -\sqrt{10} \qquad \sqrt{3} \qquad 0$$

Solución

Expresemos los números dados en forma decimal con aproximaciones a las milésimas:

$$\begin{array}{lll} -\sqrt{2} = -1,414 & \frac{1}{4} = 0,250 & -\sqrt{10} = 3,162 \\ \sqrt{3} = 1,732 & 3 = 3,000 & 0 = 0,000 \end{array}$$

Luego, podemos escribir en forma decreciente:

$$3,000 > 1,732 > 0,250 > 0,000 > -1,414 > -3,162$$

En forma creciente tenemos:

$$-3,162 < -1,414 < 0,000 < 0,250 < 1,732 < 3,000$$

9.2 RELACIÓN "MAYOR O IGUAL QUE" EN $\mathbf{R}$

Dados los números $p, q \in \mathbf{R}$, se dice que p es mayor o igual que q si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- p es mayor que q ($p > q$)
- p es igual a q ($p = q$)

Simbólicamente las dos condiciones anteriores pueden expresarse como:

$$p \geq q \quad (9.6)$$

donde el símbolo $\geq$ se lee "mayor o igual que". Como ejemplos de la relación (9.6) tenemos:

$$\sqrt{3} \geq 1 \text{ porque } 1,7321... > 1 \quad \pi \geq \pi \text{ porque } \pi = \pi$$

$$-\sqrt{10} \geq -4 \text{ porque } -3,162... > -4$$

9.3 RELACIÓN "MENOR O IGUAL QUE" EN $\mathbf{R}$

Dados los números $p, q \in \mathbf{R}$, se dice que p es menor o igual que q si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- p es menor que q ($p < q$)
- p es igual a q ($p = q$)

Las relaciones anteriores pueden escribirse simbólicamente como:

$$p \leq q \quad (9.7)$$

donde el símbolo $\leq$ significa "menor o igual que". Como ejemplos de la relación (9.7) tenemos:

$$1 \leq \sqrt{3} \text{ porque } 1 < 1,7321... \quad \pi \leq \pi \text{ porque } \pi = \pi$$

$$-4 \leq -\sqrt{10} \text{ porque } -4 < -3,162...$$

■ EJEMPLO 9.2

Usa los símbolos $\leq$ y $\geq$ para ordenar en formas decreciente y creciente los siguientes números reales:

$$0,5 \qquad \frac{3}{4} \qquad -\sqrt{5} \qquad -\pi \qquad 1 \qquad -\sqrt{12}$$

Solución

Aproximando a las milésimas:

$$\begin{array}{lll} 0,5 = 0,500 & \frac{3}{4} = 0,750 & -\sqrt{5} = -2,236 \\ -\pi = -3,141 & 1 = 1,000 & -\sqrt{12} = -3,464 \end{array}$$

En forma creciente:

$$-3,464 \leq -3,141 \leq -2,236 \leq 0,500 \leq 0,750 \leq 1,000$$

En forma decreciente:

$$1,000 \geq 0,750 \geq 0,500 \geq -2,236 \geq -3,141 \geq -3,464$$

9.4 ADICIÓN DE UN NÚMERO REAL A AMBOS MIEMBROS DE UNA DESIGUALDAD

Cuando se suma un número real a ambos miembros de una desigualdad, no se altera el sentido de la misma.

Consideremos las desigualdades:

$$p \geq q \qquad m \leq n$$

Si sumamos el número real a a ambos miembros obtenemos:

$$p + a \geq q + a \qquad m + a \leq n + a$$

En ambos casos el signo de la desigualdad se mantiene. Así, si sumamos 2 a ambos miembros de la desigualdad $\pi \geq \sqrt{2}$, se tiene:

$$3,14 + 2 \geq 1,41 + 2 \Rightarrow 5,14 \geq 3,41$$

Si sumamos -5 a ambos miembros de $\pi \geq \sqrt{2}$:

$$3,14 + (-5) \geq 1,41 + (-5) \Rightarrow -1,86 \geq -3,59$$

9.5 MULTIPLICACIÓN DE LOS MIEMBROS DE UNA DESIGUALDAD POR UN NÚMERO REAL POSITIVO

Cuando se multiplican los miembros de una desigualdad por un número real positivo, se obtiene también una desigualdad del mismo sentido.

Consideremos las desigualdades:

$$p \geq q \qquad m \leq n$$

Si las multiplicamos por el número real $a > 0$, se obtiene:

$$ap \geq aq \qquad am \leq an$$

donde el sentido de la desigualdad se mantiene. Tomemos la desigualdad:

$$\pi \geq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 3,14 \geq 1,41$$

Si multiplicamos ambos miembros por 2, se obtiene una desigualdad del mismo sentido. Esto es:

$$2 \cdot 3,14 \geq 2 \cdot 1,41 \quad \Rightarrow \quad 6,28 \geq 2,82$$

9.6 MULTIPLICACIÓN DE LOS MIEMBROS DE UNA DESIGUALDAD POR UN NÚMERO REAL NEGATIVO

Cuando se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número real negativo, se obtiene una desigualdad de sentido contrario.

Al multiplicar:

$$p \geq q \qquad m \leq n$$

por el número real $a < 0$, el sentido de las desigualdades cambia:

$$ap \leq aq \qquad am \geq an$$

Si la desigualdad:

$$\pi \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 3,14 \geq 1$$

se multiplica por -2 , se obtiene una desigualdad de sentido contrario:

$$(-2) \cdot (3,14) \leq (-2) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad -6,28 \leq -2$$

◆

9.1 Ordena de mayor a menor los siguientes números y establece las relaciones de orden entre ellos ($\leq$, $\geq$):

$$3 \quad -\sqrt{5} \quad -1 \quad 0 \quad \sqrt{7} \quad \pi \quad -4$$

9.2 Ordena de menor a mayor los siguientes números y establece las relaciones de orden entre ellos ($\leq$, $\geq$):

$$-\pi \quad -3 \quad 1 \quad -7 \quad -\sqrt{2} \quad -\sqrt{3} \quad 3$$

9.3 Escribe 10 números reales, no enteros, comprendidos entre:

a) $0 \leq y \leq 9$ **b)** $-\pi \leq y \leq 2$

9.4 Determina cuáles relaciones son falsas:

a) $3 \geq 5$ **b)** $\pi < 8$ **c)** $-3 > -7$ **d)** $-\sqrt{2} < -\sqrt{3}$
e) $-\sqrt{3} \leq 1$ **f)** $0 \leq 2$ **g)** $-5 \geq -10$ **h)** $-\sqrt{5} \leq -\sqrt{5}$

9.5 ¿Cuál símbolo pondrías en el espacio en blanco?

a) $-10 \underline{\hspace{1cm}} 10$ b) $-1 + \sqrt{3} \underline{\hspace{1cm}} 0$ c) $0 \underline{\hspace{1cm}} -1$
d) $\sqrt{8} \underline{\hspace{1cm}} 3,18$ e) $-\frac{1}{\pi} \underline{\hspace{1cm}} -3$ f) $2 + \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{3} + \sqrt{3}$

9.6 ¿Cómo varían las siguientes desigualdades?

a) $3 \geq \sqrt{2}$ Cuando se suma -1 a ambos miembros.

b) $-\sqrt{3} \leq \sqrt{2}$ Cuando se resta -2 a ambos miembros.

c) $-2 + \sqrt{3} < 5$ Cuando se multiplican por 4 ambos miembros.

d) $-2 \leq \sqrt{2}$ Cuando se multiplican por -1 ambos miembros.

e) $-\sqrt{2} < -1$ Cuando se multiplican por -5 ambos miembros.

En todos los casos anteriores, efectúa las operaciones necesarias.

10.1 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

Considera la recta numérica de la fig. 10.1. Allí figuran varios números pertenecientes a $\mathbf{R}$. Si medimos la distancia entre 0 y el número $-\sqrt{10}$, encontraremos que es igual a la distancia entre 0 y $\sqrt{10}$. Esto es general y se puede demostrar que:

La distancia entre 0 y un número real positivo a es igual a la distancia entre 0 y el número real negativo $-a$.

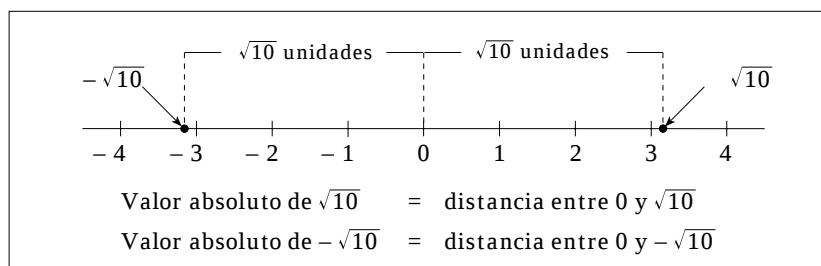


Fig. 10.1 Valor absoluto de un número real.

A esta distancia se le conoce con el nombre de **valor absoluto** del número real a y se representa de la manera siguiente:

$$\text{Valor absoluto de } a = |a| = a$$

$$\text{Valor absoluto de } -a = |-a| = a$$

donde las barras verticales corresponden al símbolo de valor absoluto. De las relaciones anteriores puedes deducir que:

El valor absoluto de un número es siempre positivo.

Como ejemplos tenemos:

$$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$|2\pi| = 2\pi$$

$$|-2\pi| = 2\pi$$

■ **EJEMPLO 10.1**

Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $|- \sqrt{3} + 5| - 1$

b) $-5|\sqrt{3}| - 2|3\sqrt{3} - 2| + 7\sqrt{3}$

Utiliza 3 cifras decimales en tus cálculos.

Solución

a) $|- \sqrt{3} + 5| - 1 = |-1,732 + 5| - 1 = 3,268 - 1 = 2,268$

b) Observa primero que: $|3\sqrt{3} - 2| = |3 \cdot 1,732 - 2| = |5,196 - 2| > 0$

En base a lo anterior, podemos sacar la expresión $3\sqrt{3} - 2$ del signo de valor absoluto y escribir:

$$\begin{aligned} -5|\sqrt{3}| - 2|3\sqrt{3} - 2| + 7\sqrt{3} &= -5\sqrt{3} - 2 \cdot (3\sqrt{3} - 2) + 7\sqrt{3} = \\ &= -5|\sqrt{3}| - 6\sqrt{3} + 4 + 7\sqrt{3} = (-5 - 6 + 7)\sqrt{3} + 4 = \\ &= -4\sqrt{3} + 4 = 4(1 - \sqrt{3}) = 4(1 - 1,732) = -2,928 \end{aligned}$$

10.2 PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

10.2.1 El valor absoluto de cero es cero

Esta propiedad puede escribirse de la forma siguiente:

$$|x| = 0 \text{ si y sólo si } x = 0 \quad (10.1)$$

10.2.2 Para todo $x \in \mathbf{R}$, el valor absoluto de x es igual al valor absoluto de $-x$:

$$|x| = |-x| \text{ para todo } x \in \mathbf{R} \quad (10.2)$$

Así, por ejemplo: $|\sqrt{2}| = |-\sqrt{2}| \quad |8| = |-8|$

10.2.3 Si $a > 0$ y $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$.

Así, por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} |x| = 2 & \text{implica que } x = 2 & \text{o } x = -2 \\ |x + 5| = 3 & \text{implica que } x + 5 = 3 & \text{o } x + 5 = -3 \\ |2y - 1| = 1 & \text{implica que } 2y - 1 = 1 & \text{o } 2y - 1 = -1 \end{array}$$

10.2.4 Para todo $x, y \in \mathbf{R}$, se cumple que:

$$|x| + |y| \geq |x + y| \quad (10.3)$$

Para comprobar la desigualdad anterior, considera los siguientes casos:

$$\begin{aligned}
 x = 2 \quad y = 5 & \quad \begin{cases} |2| + |5| = 2 + 5 = 7 \\ |2 + 5| = |7| = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{Se cumple que } |2| + |5| = |2 + 5| \\
 x = -2 \quad y = 5 & \quad \begin{cases} |-2| + |5| = 2 + 5 = 7 \\ |-2 + 5| = |3| = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Se cumple que } |-2| + |5| > |-2 + 5| \\
 x = 2 \quad y = -5 & \quad \begin{cases} |2| + |-5| = 2 + 5 = 7 \\ |2 - 5| = |-3| = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Se cumple que } |2| + |-5| > |2 - 5|
 \end{aligned}$$

10.2.5 Para todo $x, y \in \mathbf{R}$, se cumple que:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad (10.4)$$

Considera, por ejemplo, los números 3 y 4:

$$\underbrace{3 \cdot 4}_{12} = \underbrace{|3| \cdot |4|}_{12} \quad \underbrace{|(-3) \cdot 4|}_{12} = \underbrace{|-3| \cdot |4|}_{12}$$

10.2.6 Dados $x, y \in \mathbf{R}$, se cumple:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0 \quad (10.5)$$

Así tenemos:

$$\left| \frac{3}{4} \right| = 0,75 \Rightarrow \frac{|3|}{|4|} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = 0,75 \Rightarrow \frac{|-3|}{|-4|} = \frac{3}{4} = 0,75$$

◆ EJERCICIOS

10.1 Calcula, con aproximación a las centésimas, las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \quad |-\sqrt{2} + 4| - 5 & \text{b)} & \quad -3\sqrt{2} + |-3\sqrt{2}| - 6 & \text{c)} & \quad |-3| + |-2\sqrt{3} + 1| + 10 \\
 \text{d)} & \quad \frac{3}{|-2\sqrt{2}|} + \sqrt{2 + \pi} & \text{e)} & \quad -|-\sqrt{25} + 4| - |\sqrt{169}| & \text{f)} & \quad \left| -\frac{1}{3} + 1 \right| + \left| -\sqrt{2} + \frac{1}{\pi} \right|
 \end{aligned}$$

10.2 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas:

a) $|6| = |-6|$

b) $|\sqrt{2}| = |-\sqrt{2}|$

c) $|\pi| = -\pi$

d) $|\sqrt{\pi}| \geq 1$

e) $\left| -\frac{3}{4} \right| \leq \frac{3}{4}$

f) $|\sqrt{4} - 3| < |3 - \sqrt{4}|$

g) $|\sqrt{2}| + |\sqrt{3}| \geq |-\sqrt{2} + \sqrt{3}|$

h) $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{|-\sqrt{2}|}{2} + 1$

i) $|-1 + \sqrt{3}| \leq |-1| + \sqrt{3}$

j) $\frac{|-12|}{|2|} > \left| -\frac{12}{2} \right|$

k) $|-3| \cdot |-4| < |(-3) \cdot (-4)|$

l) $\left| \frac{-3 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right| = \frac{|-3 + \sqrt{2}|}{1 + \sqrt{2}}$

10.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $|ax + b| = c$

La solución de ecuaciones de la forma:

$$|ax + b| = c \quad (10.6)$$

se basa en la tercera propiedad del valor absoluto que estudiamos. Es decir, para que (10.6) se cumpla, es necesario que:

$$ax + b = c \quad \text{o} \quad ax + b = -c$$

Las expresiones anteriores llevan al planteamiento de dos ecuaciones de primer grado cuyas soluciones son válidas para la ecuación 10.6. Los siguientes ejemplos muestran la forma de encontrar la solución.

■ EJEMPLO 10.2

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|7x - 2| = 6$ b) $|5x + 4| = 10$ c) $2|x - 5| = 1$ d) $|\sqrt{2} + x| = \sqrt{8}$

Solución

$$\text{a) } |7x - 2| = 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7x - 2 = 6 \Rightarrow 7x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{7} \\ 7x - 2 = -6 \Rightarrow 7x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{7} \end{array} \right.$$

Para comprobar que los valores anteriores son soluciones de la ecuación dada, los sustituimos en la misma:

$$\left| 7 \cdot \frac{8}{7} - 2 \right| = |8 - 2| = |6| = 6$$

$$\left| 7 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) - 2 \right| = |-4 - 2| = |-6| = 6$$

$$\text{b) } |5x + 4| = 10 \quad \begin{cases} 5x + 4 = 10 & \Rightarrow 5x = 6 & \Rightarrow x = \frac{6}{5} \\ 5x + 4 = -10 & \Rightarrow 5x = -14 & \Rightarrow x = -\frac{14}{5} \end{cases}$$

$$\text{c) } 2|x - 5| = 1 \quad \begin{cases} 2(x - 5) = 1 & \Rightarrow x - 5 = \frac{1}{2} & \Rightarrow x = \frac{11}{2} \\ 2(x - 5) = -1 & \Rightarrow x - 5 = -\frac{1}{2} & \Rightarrow x = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{d) } |-\sqrt{2} + x| = \sqrt{8} \quad \begin{cases} -\sqrt{2} + x = 2\sqrt{2} & \Rightarrow x = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} & \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} + x = -2\sqrt{2} & \Rightarrow x = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} & \Rightarrow x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

■ EJEMPLO 10.3

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{|3x - 2|}{4} = 5$$

$$\text{b) } \left| 3x - \frac{2x + 6}{2} \right| = 4$$

$$\text{c) } x + 7\left|\frac{x + 6}{2}\right| = 4$$

$$\text{d) } \left|\frac{3x - 1}{2}\right| + x = 1$$

Solución

$$\text{a) } \frac{|3x - 2|}{4} = 5 \quad \begin{cases} 3x - 2 = 20 & \Rightarrow 3x = 22 & \Rightarrow x = \frac{22}{3} \\ 3x - 2 = -20 & \Rightarrow 3x = -18 & \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \left| 3x - \frac{2x + 6}{2} \right| = 4 \quad \begin{cases} 3x - \frac{2x + 6}{2} = 4 & \Rightarrow 4x = 14 & \Rightarrow x = \frac{7}{2} \\ 3x - \frac{2x + 6}{2} = -4 & \Rightarrow 4x = -2 & \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

c) Transformemos la ecuación dada para aislar el término que corresponde al valor absoluto:

$$x + 7\left|\frac{x+6}{2}\right| = 4 \Rightarrow 7\left|\frac{x+6}{2}\right| = 4 - x \Rightarrow \left|\frac{x+6}{2}\right| = \frac{(4-x)}{7}$$

Podemos entonces escribir:

$$\left|\frac{x+6}{2}\right| = \frac{1}{7}(4-x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+6}{2} = \frac{1}{7}(4-x) \Rightarrow 9x = -34 \Rightarrow x = -\frac{34}{9} \\ \frac{x+6}{2} = -\frac{1}{7}(4-x) \Rightarrow 5x = -50 \Rightarrow x = -10 \end{array} \right.$$

d) Transformando la ecuación dada para aislar el término que tiene el valor absoluto:

$$\left|\frac{3x-1}{2}\right| + x = 1 \Rightarrow \left|\frac{3x-1}{2}\right| = 1 - x$$

Luego:

$$\left|\frac{3x-1}{2}\right| = 1 - x \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-1}{2} = 1 - x \Rightarrow 3x - 1 = 2 - 2x \Rightarrow x = \frac{3}{5} \\ \frac{3x-1}{2} = -(1 - x) \Rightarrow 3x - 1 = -2 + 2x \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

◆ EJERCICIOS

10.3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|3x| = 6$

b) $|3x - 25| = 13$

c) $|x - 3\sqrt{3}| - 10 = \sqrt{81}$

d) $2|7 - x| = 1$

e) $|5x + 9| = 17$

f) $\frac{|2x+6|}{|x-4|} = 4$

g) $|x+1| + |-5| = 10$

h) $\left|7x - \frac{5x-4}{2}\right| = 3$

i) $\frac{3}{2}|x+7| - x = 11$

j) $4x + |7x - 4| = 3$

k) $1 - \left|\frac{5x+1}{7}\right| = -\frac{1}{3}x$

l) $\left|\frac{10x-6}{3}\right| + x = 2$

11.1 LOS NÚMEROS REALES Y LA RECTA NUMÉRICA

En el objetivo 2 se estudió la ubicación de un número irracional sobre la recta numérica L . En general, cualquier número real puede ser representado mediante un punto perteneciente a la recta L de forma que:

- A cada número real le corresponde exactamente un punto sobre la recta L .
- A cada punto sobre la recta L le corresponde exactamente un número real.

Las dos proposiciones anteriores definen una función biyectiva entre los números reales y la recta numérica que puede representarse como se indica en la fig. 11.1.

$R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$, representan a los números reales y $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$, son los puntos correspondientes a los mismos.

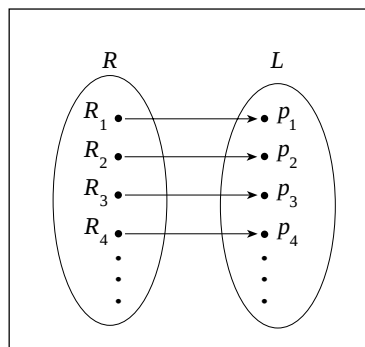


Fig. 11.1 Función biyectiva entre los números reales y la recta numérica.

A la recta L , sobre la cual podemos representar los números racionales e irracionales, se le conoce con el nombre de **recta real**. Esquemáticamente esta recta se muestra en la fig. 11.2.

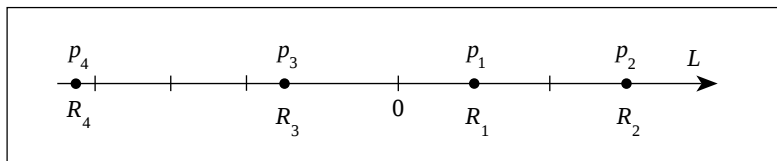


Fig. 11.2 La recta real.

A los números reales $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$, se les conoce como *coordenadas de los puntos*, $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$, respectivamente y para indicar esto se escribe:

$$p_1(R_1)$$

$$p_2(R_2)$$

$$p_3(R_3)$$

$$p_4(R_4)$$

Al punto **0** se le conoce como *origen de la recta real*. A los números reales $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$, se les denomina también *abscisas* de $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$. En la fig. 11.3 se muestran varios casos numéricos.

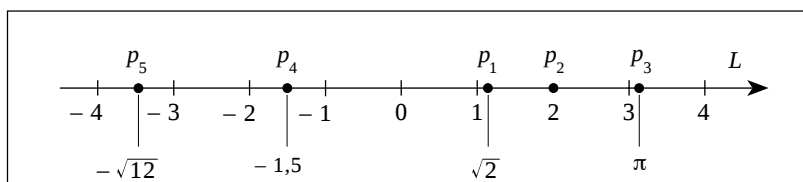


Fig. 11.3 Correspondencia entre varios puntos de la recta real y sus coordenadas.

Para los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 puede escribirse:

$$\text{Como la coordenada de } p_1 \text{ es } \sqrt{2} \Rightarrow p_1(\sqrt{2})$$

$$\text{Como la coordenada de } p_2 \text{ es } 2 \Rightarrow p_2(2)$$

$$\text{Como la coordenada de } p_3 \text{ es } \pi \Rightarrow p_3(\pi)$$

$$\text{Como la coordenada de } p_4 \text{ es } -1,5 \Rightarrow p_4(-1,5)$$

$$\text{Como la coordenada de } p_5 \text{ es } -\sqrt{12} \Rightarrow p_5(-\sqrt{12})$$

Entonces:

$$\sqrt{2} \text{ es la abscisa de } p_1$$

$$2 \text{ es la abscisa de } p_2$$

$$\pi \text{ es la abscisa de } p_3$$

$$-1,5 \text{ es la abscisa de } p_4$$

$$-\sqrt{12} \text{ es la abscisa de } p_5$$

El conjunto de los números reales posee las siguientes características:

1. **Es no acotado:** Esto significa que no tiene límites ni hacia la izquierda ni hacia la derecha del cero. Es decir, los números reales se extienden desde $-\infty$ hasta $+\infty$.
2. **Es denso:** La recta no posee espacios vacíos. Siempre es posible intercalar entre dos números reales una cantidad infinita de puntos.
3. **Es ordenado:** Todo número situado a la izquierda de otro es menor que aquél. En otras palabras, los números reales están ordenados en orden creciente de izquierda a derecha. Esto es indicado en la fig. 11.3 por la punta de la flecha que señala hacia la derecha.

■ EJEMPLO 11.1

Representa sobre la recta real los elementos del conjunto:

$$M = \left\{ -1, \sqrt{15}, \frac{\pi}{2}, 2, -\sqrt{10} \right\}$$

Solución

En la fig. 11.4 se muestra, mediante puntos, la representación.

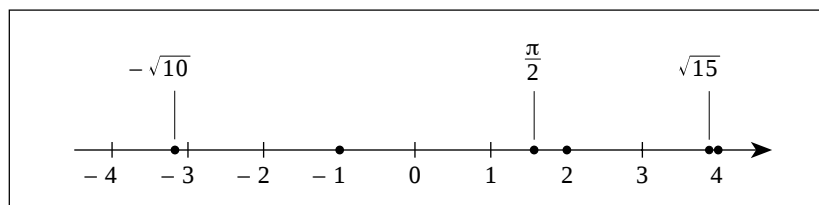


Fig. 11.4 Ejemplo 11.1.

■ EJEMPLO 11.2

En la fig. 11.5 se muestran varios puntos sobre la recta real. Representa dichos puntos según la notación $p(a)$ señalando sus abscisas.

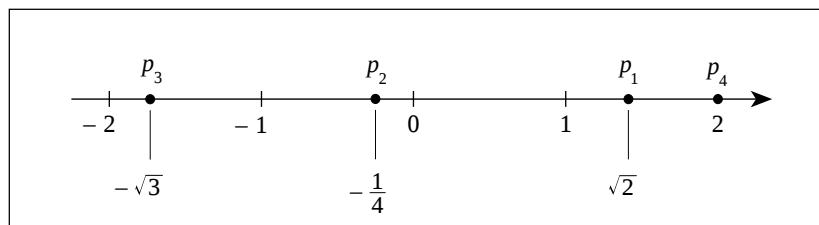


Fig. 11.5 Ejemplo 11.2.

Solución

Tenemos:

$$\text{Abcisa de } p_1: \sqrt{2} \Rightarrow p_1(\sqrt{2})$$

$$\text{Abcisa de } p_2: -\frac{1}{4} \Rightarrow p_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Abcisa de } p_3: -\sqrt{3} \Rightarrow p_3(-\sqrt{3})$$

$$\text{Abcisa de } p_4: 2 \Rightarrow p_4(2)$$

■ EJEMPLO 11.3

Considera la recta real de la fig. 11.6. a) Si $\overline{am}$ y $\overline{mb}$ tienen igual longitud, ¿cuál es la coordenada de m ? b) Si $\overline{dr}$ y $\overline{ro}$ tienen igual longitud, ¿cuál es la coordenada de r ? c) Si $\overline{ed}$ tiene la misma longitud de $\overline{se}$, ¿cuál es la coordenada de e ?

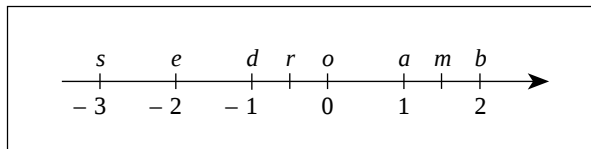


Fig. 11.6 Ejemplo 11.3.

Solución

a) Si $\overline{am}$ tiene la misma longitud de $\overline{mb}$, el punto m está situado en la mitad de la longitud del segmento $\overline{ab}$. Por tanto, su coordenada es:

$$x = 1 + 0,5 = 1,5$$

b) Como $\overline{dr} = \overline{ro}$, el punto r está situado en la mitad de la longitud del segmento $\overline{od}$ y por tanto, su coordenada es:

$$x = -0,5$$

c) Si $\overline{ed} = \overline{se}$, e está a igual distancia del puntos que el punto d , por tanto, su coordenada es:

$$x = -1 - 1 = -2$$

◆ EJERCICIOS

11.1 Representa los elementos del conjunto:

$$M = \left\{ -3, \pi, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0 \right\}$$

sobre la recta real:

11.2 En la fig. 11.7 se muestran varios puntos sobre la recta real. Representa dichos puntos según la notación $p(a)$ señalando sus abscisas.

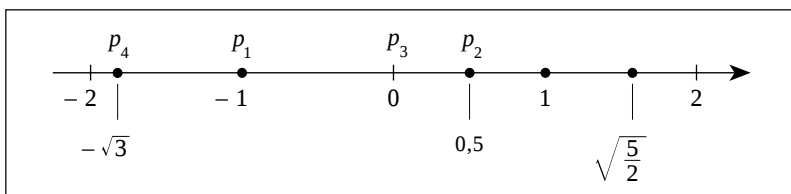
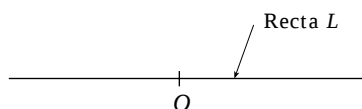


Fig. 11.7 Ejercicio 11.2.

12.1 CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE COORDENADAS SOBRE UNA RECTA L

Dada una recta cualquiera, L , es posible definir sobre la misma un patrón de medida que conforme un sistema de coordenadas. Para ello se procede de la manera siguiente:

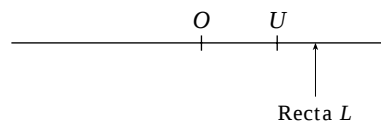
1. Se dibuja la recta L y se establece un origen O :



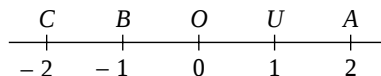
2. Se define una longitud como unidad arbitraria de medida:



3. Se lleva esta unidad arbitraria de medida a la recta L de manera que uno de sus extremos coincida con el origen O :



4. A partir de U hacia la derecha y de O hacia la izquierda, se lleva repetidamente la distancia $\overline{OU}$. De esta manera se obtienen puntos cuyas coordenadas respecto al origen son $1, 2, 3, \dots$, hacia la derecha y $-1, -2, -3, \dots$, hacia la izquierda.



Distancia entre O y $U = d(O, U) = 1$

El sistema así formado permite asignar coordenadas a los distintos puntos sobre

la recta real. Así, tenemos:

$$O(0) \quad U(1) \quad A(2) \quad B(-1) \quad C(-2)$$

Otros puntos sobre la recta real pueden ser localizados dividiendo la unidad básica en intervalos más pequeños.

12.2 DISTANCIA DESDE EL ORIGEN A CUALQUIER PUNTO DE LA RECTA REAL

Se define la distancia desde un punto A cualquiera al origen de la recta real como la longitud del segmento $\overline{OA}$. Para el caso del punto A , de coordenada a , a esta distancia se le designa como $d(A, O)$:

$$\text{Distancia desde } A \text{ hasta } O: \quad d(A, O) = |a - 0|$$

Es decir, la distancia desde A hasta O corresponde al valor absoluto de la diferencia entre la coordenada de A y la de O .

En la práctica, para hallar la distancia entre un punto A de coordenada a y el origen, simplemente se halla el módulo de la coordenada del punto.

$$d(A, O) = \overline{AO} = |a| \quad (12.1)$$

■ EJEMPLO 12.1

Dada la recta numérica de la fig. 12.1. **a)** Determina las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E . **b)** Calcula las siguientes distancias:

$$\overline{AO}, \overline{OA}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{OD}, \overline{DO}, \overline{EO}$$

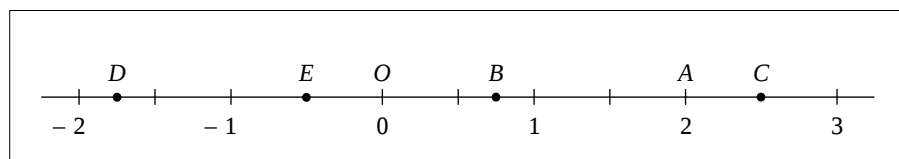


Fig. 12.1 Ejemplo 12.1.

Solución

- a)**
- La coordenada de A es 2: $A(2)$
 - La coordenada de B es 0,75: $B(0,75)$
 - La coordenada de C es 2,5: $C(2,5)$
 - La coordenada de D es -1,75: $D(-1,75)$
 - La coordenada de E es -0,5: $E(-0,5)$

b) Se tiene:

$$d(A, O) = \overline{AO} = |2 - 0| = |2| = 2$$

$$d(O, A) = \overline{OA} = |0 - 2| = |-2| = 2$$

$$d(B, O) = \overline{BO} = |0,75 - 0| = |0,75| = 0,75$$

$$d(C, O) = \overline{CO} = |2,5 - 0| = |2,5| = 2,5$$

$$d(O, D) = \overline{OD} = |0 - (-1,75)| = |1,75| = 1,75$$

$$d(D, O) = \overline{DO} = |-1,75 - 0| = |-1,75| = 1,75$$

$$d(E, O) = \overline{EO} = |-0,5 - 0| = |-0,5| = 0,5$$

Observa que $\overline{AO} = \overline{OA}$ y que $\overline{OD} = \overline{DO}$.

12.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE LA RECTA REAL

Se define la distancia entre dos puntos cualesquiera, P y Q , de la recta real como la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

Para el caso de los puntos P y Q , esta distancia se designa como $d(P, Q)$:

$$\text{Distancia desde } P \text{ hasta } Q: \quad \overline{PQ} = d(P, Q)$$

La distancia desde P hasta Q corresponde al valor absoluto de la diferencia entre la coordenada de P , p , y la de Q , q :

$$d(P, Q) = |p - q| \quad (12.2)$$

■ EJEMPLO 12.2

Dada la recta numérica de la fig. 12.2. a) Determina las coordenadas de los puntos A , B , M , N y P . b) Calcula las siguientes distancias:

$$d(A, B) \quad d(B, A) \quad d(A, M) \quad d(P, B) \quad d(B, N) \quad d(N, A)$$

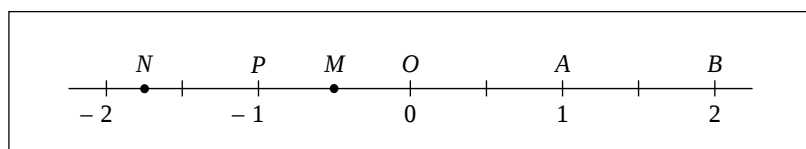


Fig. 12.2 Ejemplo 12.2.

Solución

- a) La coordenada de A es 1: $A(1)$
 La coordenada de B es 2: $B(2)$

La coordenada de M es $-0,5$: $M(-0,5)$

La coordenada de N es $-1,75$: $N(-1,75)$

La coordenada de P es -1 : $P(-1)$

b) Se tiene:

$$d(A, B) = |a - b| = |1 - 2| = |-1| = 1$$

$$d(B, A) = |b - a| = |2 - 1| = |1| = 1$$

$$d(A, M) = |a - m| = |1 - (-0,5)| = |1,5| = 1,5$$

$$d(P, B) = |p - b| = |-1 - 2| = |-3| = 3$$

$$d(B, N) = |b - n| = |2 - (-1,75)| = |3,75| = 3,75$$

$$d(N, A) = |n - a| = |-1,75 - 1| = |-2,75| = 2,75$$

■ EJEMPLO 12.3

Los siguientes puntos pertenecen a la recta real:

$$A(3) \qquad B\left(-\frac{1}{4}\right) \qquad C(\sqrt{2}) \qquad D(-\pi)$$

Determina las distancias $d(A, B)$; $d(A, C)$; $d(A, D)$; $d(B, C)$; $d(B, D)$; $d(C, D)$. Usa aproximaciones a las milésimas.

Solución

$$d(A, B) = \left| 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| = \left| 3 + \frac{1}{4} \right| = |3 + 0,250| = |3,250| = 3,250$$

$$d(A, C) = |3 - \sqrt{2}| = |3 - 1,414| = |1,586| = 1,586$$

$$d(A, D) = |3 - (-\pi)| = |3 + \pi| = |3 + 3,141| = |6,141| = 6,141$$

$$d(B, C) = \left| -\frac{1}{4} - \sqrt{2} \right| = |-0,250 - 1,414| = |-1,664| = 1,664$$

$$d(B, D) = \left| -\frac{1}{4} - (-\pi) \right| = |-0,250 + 3,141| = |2,891| = 2,891$$

$$d(C, D) = |\sqrt{2} - (-\pi)| = |1,414 + 3,141| = |4,555| = 4,555$$

13.1 INTERVALOS EN $\mathbb{R}$

En muchas situaciones de la vida real estamos interesados sólo en un conjunto de puntos de la recta real. Por ejemplo:

- a) Número de estudiantes cuyo promedio de calificaciones es mayor de 15 puntos. Si llamamos el promedio $\bar{x}$, esta situación puede ser representada por:

$$\bar{x} > 15 \Rightarrow 15 < \bar{x}$$

Si la calificación máxima es 20 puntos, la relación anterior se convierte en:

$$15 < \bar{x} \leq 20$$

Lo que indica que estamos representando los promedios mayores de 15 puntos y menores o iguales a 20 puntos.

- b) Ciudades del país cuya temperatura oscila entre 18°C y 25°C . La temperatura T puede representarse como:

$$18 \leq T \leq 25$$

Es decir la temperatura es mayor o igual a 18°C y menor o igual a 25°C .

Los casos citados corresponden a puntos que ocupan solamente porciones de la recta real. Tales conjuntos limitados son ejemplos de **intervalos** sobre la recta real.

13.2 INTERVALOS CERRADOS

*Dados los números reales **a** y **b**, con $a < b$, se define el intervalo cerrado de extremos **a** y **b** como el conjunto de números reales comprendidos entre **a** y **b**, incluyendo dichos extremos.*

Si x es un número cualquiera incluido en el intervalo, la relación anterior se expresa como:

$$a \leq x \leq b$$

(13.1)

relación que indica que x es mayor o igual que a y menor o igual que b . Al intervalo cerrado dado por (13.1) se le representa por la notación $[a, b]$:

Intervalo cerrado de extremos a y b : $[a, b]$

donde los corchetes indican que se trata de un intervalo cerrado. Más estrictamente podemos escribir:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (13.2)$$

que especifica que se trata de un intervalo cerrado entre los extremos a y b . Establece, además, la relación anterior, que x pertenece al conjunto de los números reales.

Gráficamente un intervalo cerrado se representa como se muestra en la fig. 13.1. Los corchetes en los extremos a y b se utilizan para indicar que el intervalo se cierra en dichos extremos:

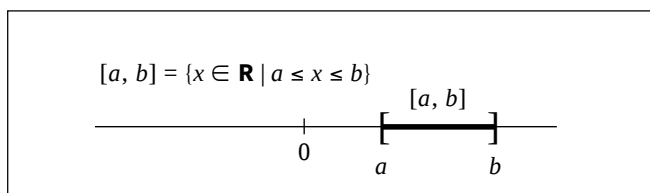


Fig. 13.1 Representación gráfica del intervalo cerrado $[a, b]$.

■ EJEMPLO 13.1

Expresa, usando la notación de intervalo, los siguientes conjuntos y represéntalos sobre la recta real.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$

Solución

a) Se trata de un intervalo cerrado de extremos 1 y 3, por tanto su representación será $[1, 3]$:

$$[1, 3] = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

b) Se trata de un intervalo cerrado de extremos -3 y 0 , por tanto su representación será $[-3, 0]$:

relación que indica que x es mayor o igual que a y menor o igual que b . Al intervalo cerrado dado por (13.1) se le representa por la notación $[a, b]$:

Intervalo cerrado de extremos a y b : $[a, b]$

donde los corchetes indican que se trata de un intervalo cerrado. Más estrictamente podemos escribir:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (13.2)$$

que especifica que se trata de un intervalo cerrado entre los extremos a y b . Establece, además, la relación anterior, que x pertenece al conjunto de los números reales.

Gráficamente un intervalo cerrado se representa como se muestra en la fig. 13.1. Los corchetes en los extremos a y b se utilizan para indicar que el intervalo se cierra en dichos extremos:

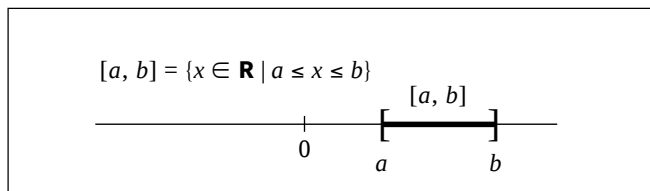


Fig. 13.1 Representación gráfica del intervalo cerrado $[a, b]$.

■ EJEMPLO 13.1

Expresa, usando la notación de intervalo, los siguientes conjuntos y represéntalos sobre la recta real.

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$

Solución

a) Se trata de un intervalo cerrado de extremos 1 y 3, por tanto su representación será $[1, 3]$:

$$[1, 3] = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

b) Se trata de un intervalo cerrado de extremos -3 y 0 , por tanto su representación será $[-3, 0]$:

Si x es un número cualquiera del intervalo, la definición anterior se expresa como:

$$a < x < b \quad (13.3)$$

relación que indica que x es mayor que a y menor que b .

Al intervalo abierto dado por (13.3) se le representa por la notación (a, b) :

$$\text{Intervalo abierto de extremos } a \text{ y } b: \quad (a, b)$$

donde los paréntesis indican que se trata de un intervalo abierto. Más estrictamente podemos escribir:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \quad (13.4)$$

que especifica que se trata de un intervalo abierto de extremos a y b . La relación anterior establece, además, que los números en el intervalo pertenecen al conjunto de los reales.

Gráficamente un intervalo abierto se representa como se muestra en la fig. 13.3. Los paréntesis en los extremos del intervalo indican que éste es abierto.

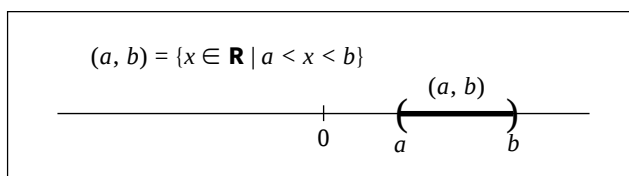


Fig. 13.3 Representación gráfica del intervalo abierto (a, b) .

■ EJEMPLO 13.3

Expresa, usando la notación de intervalo, los siguientes conjuntos y represéntalos sobre la recta real:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < -1\}$

Solución

a) Se trata de un intervalo abierto de extremos 0 y 3, por tanto su representación será $(0, 3)$:

$$(0, 3) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 3\}$$

b) Se trata de un intervalo abierto de extremos -2 y -1 , por tanto su representación será $(-2, -1)$:

$$(-2, -1) = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < -1\}$$

En la fig. 13.4 se muestra la representación de los dos intervalos.

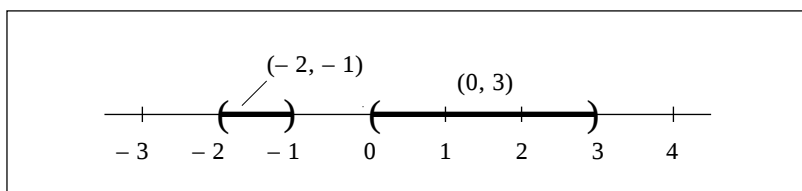


Fig. 13.4 Representación gráfica de los intervalos $(-2, -1)$ y $(0, 3)$. Ejemplo 13.3.

■ EJEMPLO 13.4

Expresa en forma de conjunto los siguientes intervalos:

a) $(-4, -3)$

b) $(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$

c) $(\sqrt{5}, \sqrt{11})$

Solución

a) $(-4, -3) = \{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x < -3\}$

b) $(-\sqrt{10}, \sqrt{10}) = \{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}\}$

c) $(\sqrt{5}, \sqrt{11}) = \{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{5} < x < \sqrt{11}\}$

■ EJEMPLO 13.5

La rapidez promedio de un móvil está dada por la relación:

$$v = \frac{x}{t}$$

donde x es la distancia recorrida y t es el tiempo empleado en recorrerla. Si la distancia varía entre 10 y 100 m en 10 s, ¿entre qué valores varía la rapidez?

Solución

La distancia recorrida puede ser representada por:

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad 10 \leq x \leq 100$$

Como la rapidez está relacionada con la distancia por la fórmula $v = x/t$, podemos

escribir:

$$\frac{x_1}{t} \leq v \leq \frac{x_2}{t}$$

donde $t = 10$ s, $x_1 = 10$ m y $x_2 = 100$ m. Es decir:

$$\frac{10}{10} \leq v \leq \frac{100}{10} \Rightarrow 1 \leq x \leq 10$$

Por tanto, podemos afirmar que cuando la distancia varía entre 10 m y 100 m en 10 s, la rapidez promedio varía entre 1 m/s y 10 m/s.

◆ EJERCICIOS

13.3 Expresa, usando la notación de intervalos, los siguientes conjuntos y represéntalos sobre la recta real:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 4\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -\pi < x < 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{7}\}$

13.4 Expresa en forma de conjuntos los siguientes intervalos:

a) $(-3, -1)$

b) $(-4, 0)$

c) $(1, 5)$

13.5 La diferencia de potencial, V (Voltios), en una resistencia R (Ohmios) cuando por ella circula una corriente I (Amperios) está dada por:

$$V = R \cdot I$$

Si la corriente es de 2 Amperios y la resistencia varía entre 10 y 12 ohmios, ¿cómo varía la diferencia de potencial?

13.4 INTERVALOS SEMIABIERTOS O SEMICERRADOS

*Dados los números reales **a** y **b**, con **a** < **b**, se define el intervalo cerrado en **a** y abierto en **b** como el conjunto de números reales comprendidos entre **a** y **b** incluyendo el extremo **a** y excluyendo el extremo **b**.*

Si x es un número cualquiera del intervalo, la definición anterior se expresa como:

$$a \leq x < b$$

(13.5)

relación que indica que x es mayor o igual que a y menor que b . El intervalo (13.5)

es un *intervalo semicerrado o semiabierto* y se representa simbólicamente por $[a, b)$:

Intervalo cerrado en a y abierto en b : $[a, b)$

donde el corchete al lado de a indica que el intervalo es cerrado en a y el paréntesis al lado de b indica que el intervalo es abierto en b . Más estrictamente podemos escribir:

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\} \quad (13.6)$$

Gráficamente, un intervalo cerrado en a y abierto en b , se representa como se muestra en la fig. 13.5. El corchete en a y el paréntesis en b indican que el intervalo es cerrado en a y abierto en b .

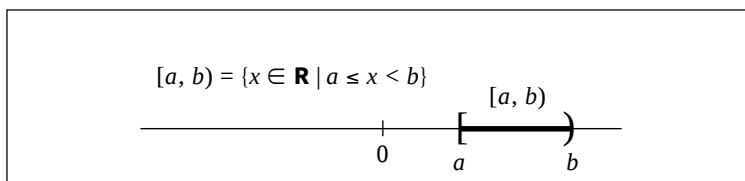


Fig. 13.5 Representación gráfica de un intervalo cerrado en a y abierto en b .

Dados los números a y b , con $a < b$, se define el intervalo abierto en a y cerrado en b como el conjunto de números reales comprendidos entre a y b excluyendo el extremo a e incluyendo el extremo b .

Para este caso podemos escribir:

$$a < x \leq b \quad (13.7)$$

El intervalo anterior se representa simbólicamente por $(a, b]$:

Intervalo abierto en a y cerrado en b : $(a, b]$

Que también puede expresarse como:

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\} \quad (13.8)$$

Gráficamente un intervalo abierto en a y cerrado en b se representa como se

muestra en la fig. 13.6. El paréntesis en a y el corchete en b indican que el intervalo es abierto en a y cerrado en b .

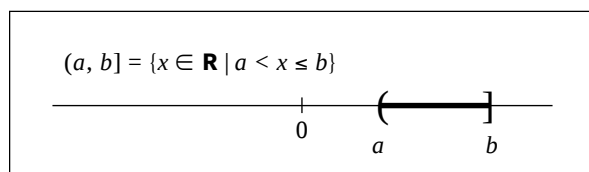


Fig. 13.6 Representación gráfica de un intervalo abierto en a y cerrado en b .

■ EJEMPLO 13.6

Expresa, usando la notación de intervalo, los siguientes conjuntos y represéntalos sobre la recta real:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x < 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leq 3\}$

Solución

a) Se trata de un intervalo cerrado en -4 y abierto en 0 :

$$[-4, 0) = \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x < 0\}$$

b) Se trata de un intervalo abierto en -2 y cerrado en 3 :

$$(-2, 3] = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leq 3\}$$

En la fig. 13.7 se representan ambos intervalos.

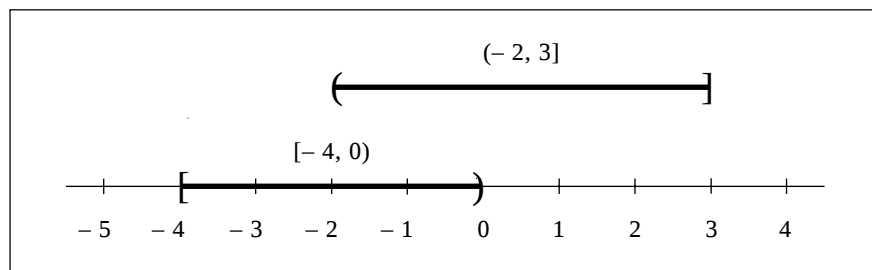


Fig. 13.7 Representación gráfica de los intervalos $[-4, 0)$ y $(-2, 3]$. Ejemplo 13.6.

Observa que los dos intervalos ocupan una zona común sobre la recta real. Esta zona corresponde a los números reales comprendidos entre -2 y 0 . Es decir:

$$[-4, 0) \cap (-2, 3] = (-2, 0) = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 0\}$$

♦ EJERCICIOS

13.6 Expresa, usando la notación de intervalos, los siguientes conjuntos y represéntalos gráficamente:

a) $M = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 3\}$

b) $N = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x < 0\}$

c) $P = \{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{2} \leq x < 1\}$

d) $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

13.5 INTERVALOS AL INFINITO

Los intervalos del tipo:

$$x \geq a$$

$$x > a$$

$$x \leq b$$

$$x < b$$

en los cuales aparece un solo límite, se conocen como *intervalos al infinito* ya que se supone que el otro límite no existe. Así, por ejemplo, el intervalo $x \geq 1$ comprende todos los puntos de la recta real mayores o igual que 1. Este intervalo se representa como se indica en la fig. 13.8. La flecha que señala hacia la derecha, indica que los puntos del intervalo se extienden indefinidamente en esa dirección.

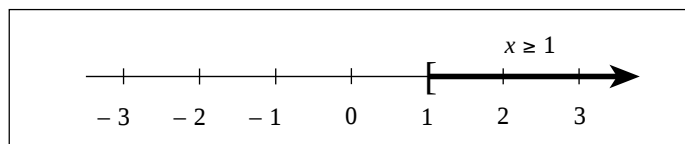


Fig. 13.8 Representación gráfica del intervalo correspondiente a los puntos $x \geq 1$.

Al intervalo $x \geq 1$ se le puede representar como:

$$[1, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$$

Lo que indica que se trata de un intervalo cerrado en 1 y abierto en el infinito. Al infinito se le representa mediante el símbolo ∞ .

De la misma manera, el intervalo $x \leq 1$ se le representa gráficamente como se muestra en la fig. 13.9.

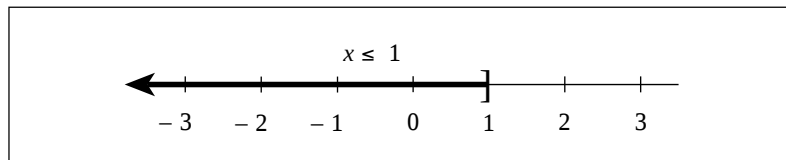


Fig. 13.9 Representación gráfica del intervalo correspondiente a los puntos $x \leq 1$.

Al intervalo $x \leq 1$ se le puede representar como:

$$(-\infty, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x \leq 1\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$$

O también:

$$(-\infty, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$$

que indica que se trata de un intervalo abierto en menos infinito $(-\infty)$ y cerrado en 1. En forma general, dado un número real a , se pueden definir los siguientes intervalos al infinito:

$x \geq a \quad \Rightarrow \quad [a, \infty)$	$x > a \quad \Rightarrow \quad (a, \infty)$
$x \leq a \quad \Rightarrow \quad (-\infty, a]$	$x < a \quad \Rightarrow \quad (-\infty, a)$

■ EJEMPLO 13.7

Expresa, mediante la notación de intervalo, los siguientes conjuntos y represéntalos gráficamente:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < \infty\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < -2\}$

Solución

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < -2\} = (-\infty, -2) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -2\}$

En la fig. 13.10 se muestra la representación gráfica de ambos intervalos.

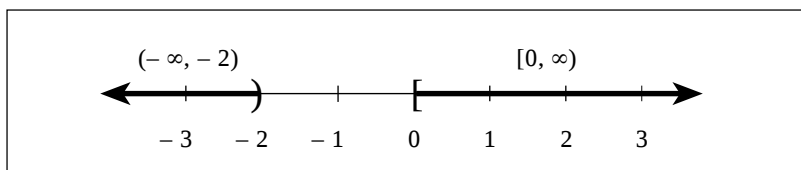


Fig. 13.10 Representación gráfica de los intervalos correspondientes a los puntos:

a) $0 \leq x < \infty$. b) $-\infty < x < -2$. Ejemplo 13.7.

■ EJEMPLO 13.8

Simboliza en forma de conjuntos los siguientes intervalos y represéntalos gráficamente:

a) $[-1, \infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c) $[\pi, \infty)$

Solución

$$\text{a)} \quad [-1, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < \infty\}$$

$$\text{b)} \quad (-\infty, 0) = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < 0\}$$

$$\text{c)} \quad [\pi, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid \pi \leq x < \infty\}$$

En la fig. 13.11 se muestra la representación gráfica de los tres intervalos.

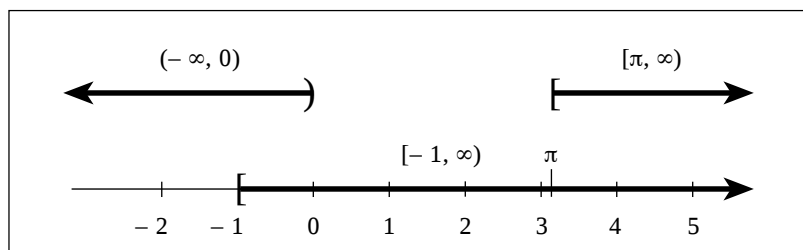


Fig. 13.11 Representación gráfica de los intervalos $[-1, \infty)$, $(-\infty, 0)$ y $[\pi, \infty)$. Ejemplo 13.8.

■ EJEMPLO 13.9

Determina si las siguientes relaciones son verdaderas o falsas:

$$\text{a)} \quad 2 \in [-1, 3]$$

$$\text{b)} \quad -\sqrt{2} \in (0, \infty)$$

$$\text{c)} \quad 0 \in (-1, 1)$$

Solución

a) La relación es verdadera, ya que el número 2 pertenece al intervalo $[-1, 3]$.

b) La relación es falsa, ya que $-\sqrt{2}$ se encuentra a la izquierda del intervalo $(0, \infty)$.

c) La relación es verdadera, ya que el número 0 pertenece al intervalo $(-1, 1)$.

◆ EJERCICIOS

13.7 Expresa, usando la notación de intervalos, los siguientes conjuntos y represéntalos gráficamente:

$$\text{a)} \quad M = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \leq 4\}$$

$$\text{b)} \quad N = \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x < 0\}$$

$$\text{c)} \quad P = \{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{2} \leq x < 3\}$$

$$\text{d)} \quad Q = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

13.8 Simboliza en forma de conjuntos los siguientes intervalos y represéntalos gráficamente:

a) $[-2, \infty)$

b) $(-\infty, -2)$

c) $[1, \infty)$

13.9 Determina si las siguientes relaciones son verdaderas:

a) $3 \in (-\infty, 1]$

b) $\frac{1}{4} \in (-1, 0)$

c) $-3 \in (-\infty, 0]$

d) $1 \in (-3, 2)$

e) $\sqrt{2} \in [-0,5; 4)$

f) $0 \in (-\infty, \infty)$

13.6 OPERACIONES DE INCLUSIÓN, UNIÓN E INTERSECCIÓN DE INTERVALOS

Para determinar si un intervalo está incluido en otro o para encontrar el intervalo resultante cuando se unen o se intersectan dos o más intervalos, es conveniente recurrir a la representación gráfica de los mismos. En los ejemplos que se resuelven a continuación se muestra la forma de proceder.

■ EJEMPLO 13.10

Determina si las relaciones:

a) $[-1, 2] \subset [-3, 4]$

b) $(0, 3] \subset [-2, 2]$

son verdaderas.

Solución

a) En la fig. 13.12 se muestran los dos intervalos, $[-1, 2]$ y $[-3, 4]$. Como puedes ver, todos los números reales en el intervalo $[-1, 2]$ están incluidos en el intervalo $[-3, 4]$. Por tanto, la relación es verdadera.

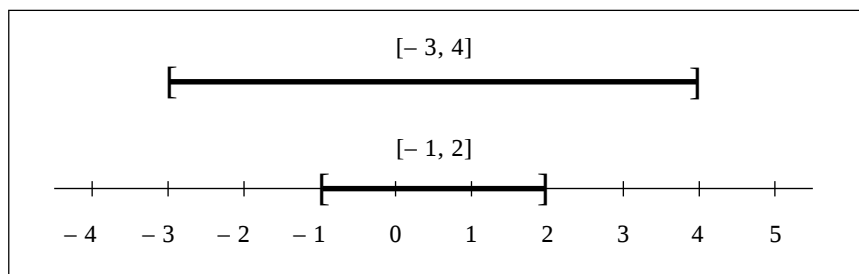


Fig. 13.12 El intervalo $[-1, 2]$ está incluido en el intervalo $[-3, 4]$. Ejemplo 13.10(a).

b) Como se muestra en la fig. 13.13, los números reales del intervalo $(0, 3]$ no pertenecen al intervalo $[-2, 2]$ y por tanto, la relación es falsa.

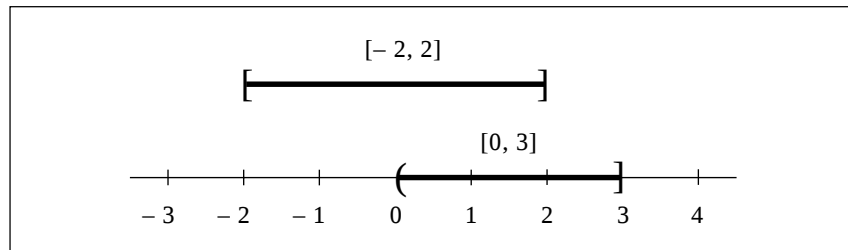


Fig. 13.13 El intervalo $(0, 3]$ no está incluido en el intervalo $[-2, 2]$. Ejemplo 13.10(b).

■ EJEMPLO 13.11

Determina el resultado de las siguientes operaciones:

- a) $[-3, 0) \cup [-2, 2]$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$
 c) $[0, \infty) \cup (-2, 1)$ d) $[-3, 1] \cup [-2, \infty)$

Da la respuesta en forma de intervalos.

Solución

a) La unión de los intervalos $[-3, 0)$ y $[-2, 2]$ debe comprender a los números reales pertenecientes a ambos intervalos. De la fig. 13.14 se obtiene:

$$[-3, 0) \cup [-2, 2] = [-3, 2]$$

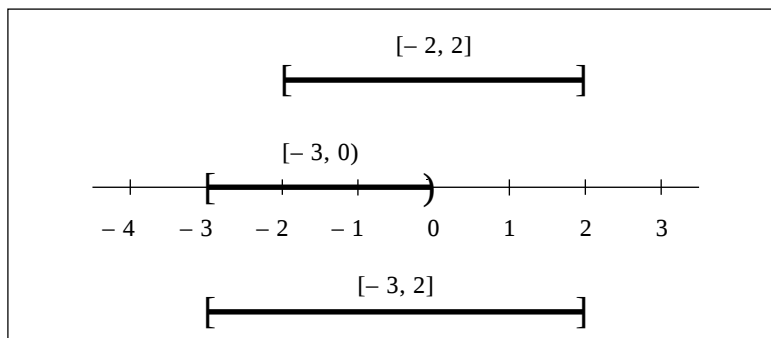


Fig. 13.14 La unión de los intervalos $[-2, 2]$ y $[-3, 0)$ es el intervalo $[-3, 2]$.

b) Tenemos:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 4\} = (1, 3) \cup [-1, 4]$$

De la fig. 13.15 puede observarse que el intervalo $[-1, 4]$ incluye a todos los números del intervalo $(1, 3)$ y por tanto:

$$(1, 3) \cup [-1, 4] = [-1, 4]$$

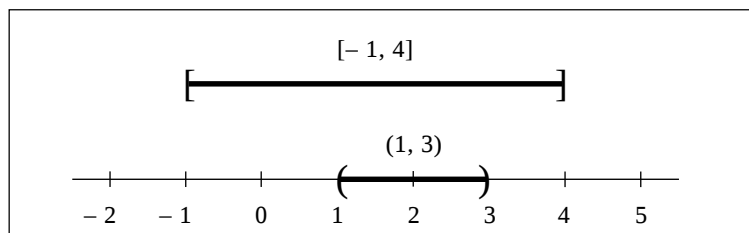


Fig. 13.15 La unión de los intervalos $(1, 3)$ y $[-1, 4]$ es el mismo intervalo $[-1, 4]$.

c) De la fig. 13.16 podemos escribir:

$$[0, \infty) \cup (-2, 1) = (-2, \infty)$$

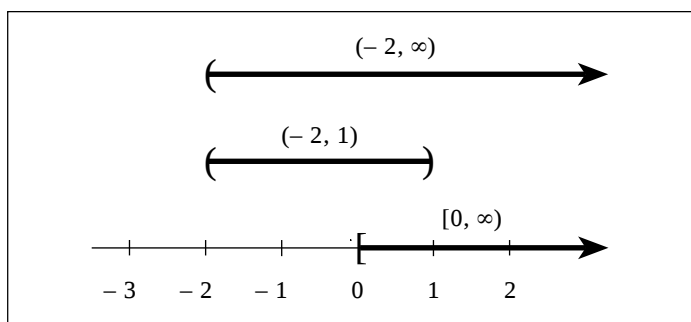


Fig. 13.16 La unión de los intervalos $[0, \infty)$ y $(-2, 1)$ es el intervalo $(-2, \infty)$.

d) De la fig. 13.17 se tiene:

$$[-3, 1] \cup [-2, \infty) = [-3, \infty)$$

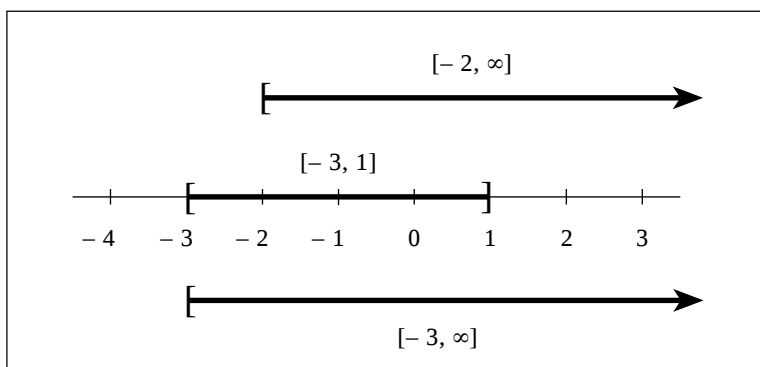


Fig. 13.17 La unión de los intervalos $[-3, 1]$ y $[-2, \infty)$ es el intervalo $[-3, \infty)$.

EJEMPLO 13.12

Determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $[-3, 4] \cap [-1, 2]$

b) $[-1, 4] \cap [2, \infty)$

c) $[-3, 3] \cap (-4, 2)$

d) $(-3, 0) \cap (1, 3)$

Da la respuesta en forma de intervalos.

Solución

Es conveniente recordar que la intersección de dos conjuntos corresponde a los elementos comunes a ambos.

a) De la fig. 13.18:

$$[-3, 4] \cap [-1, 2] = [-1, 2]$$

Observa que, como $[-1, 2] \subset [-3, 4]$, el resultado es el intervalo $[-1, 2]$.

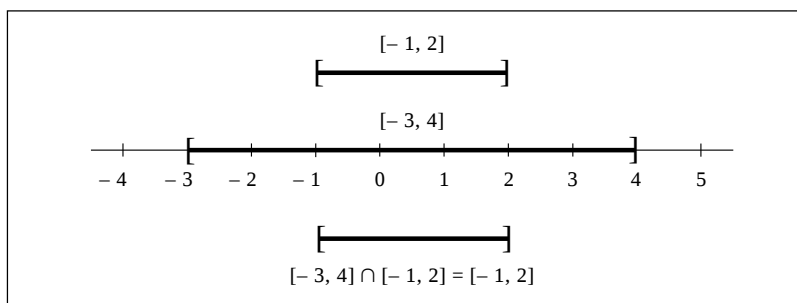


Fig. 13.18 La intersección de los intervalos $[-3, 4]$ y $[-1, 2]$ es el intervalo $[-1, 2]$.

b) Los números reales comunes a los intervalos $[-1, 4]$ y $[2, \infty)$ corresponden, según la fig. 13.19 a la operación:

$$[-1, 4] \cap [2, \infty) = [2, 4]$$

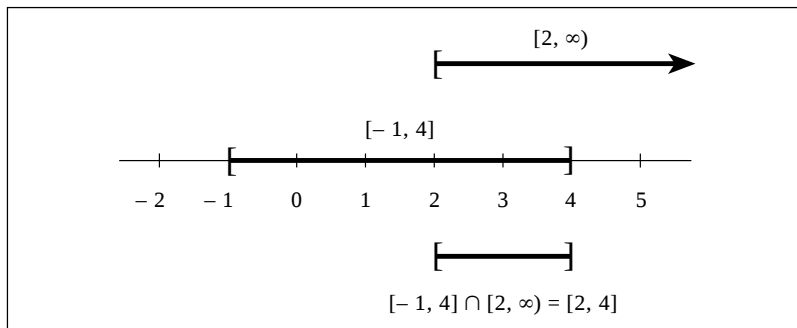


Fig. 13.19 La intersección de los intervalos $[-1, 4]$ y $[2, \infty)$ es el intervalo $[2, 4]$.

c) De la fig. 13.20 tenemos:

$$[-3, 3] \cap (-4, 2) = [-3, 2)$$

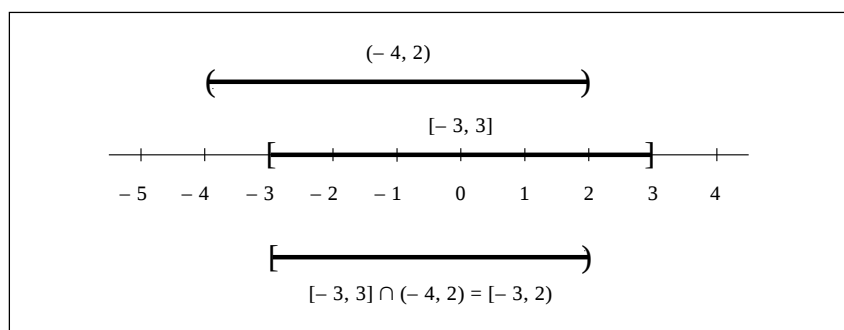


Fig. 13.20 La intersección de los intervalos $[-3, 3]$ y $(-4, 2)$ es el intervalo $[-3, 2)$.

d) Los intervalos $(-3, 0)$ y $(1, 3)$, tal como puede verse de la fig. 13.21, no poseen elementos comunes, por tanto su intersección es el conjunto vacío:

$$(-3, 0) \cap (1, 3) = \phi$$

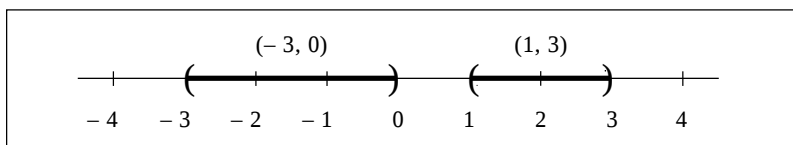


Fig. 13.21 La intersección de los intervalos $(-3, 0)$ y $(1, 3)$ es el conjunto vacío ϕ .

◆ EJERCICIOS

13.10 Determina si las siguientes relaciones son verdaderas:

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| a) $[-2, 0) \subset (-\infty, 1)$ | b) $(-1, \pi) \subset [-2, 3]$ |
| c) $(-1, 1) \subset (0, \infty)$ | d) $(-3, 4) \subset [-3, 4]$ |

13.11 Determina el resultado de las siguientes operaciones y da las respuestas en forma de intervalos:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $[-2, 0) \cup (-\infty, 1)$ | b) $(-1, \pi) \cup [-2, 3]$ |
| c) $(-1, 1) \cup (0, \infty)$ | d) $(-3, 4) \cup [-3, 4]$ |

13.12 Determina el resultado de las siguientes operaciones:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $[-2, 0) \cap (-\infty, 1)$ | b) $(-1, \pi) \cap [-2, 3]$ |
| c) $(-1, 1) \cap (0, \infty)$ | d) $(-3, 4) \cap [-3, 4]$ |

14

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

14.1 INECUACIONES DE PRIMER GRADO EN $\mathbb{R}$

Una ecuación de primer grado posee formas como las siguientes:

$$x + 1 = 4 \qquad 2x - 3 = x$$

Una *inecuación de primer grado* posee formas como las siguientes:

$$x + 1 \geq 4 \qquad 2x - 3 < x$$

Supongamos que deseamos determinar un número cuyo triplo sea igual a 6. Este enunciado conduce a la ecuación siguiente:

$$3x = 6 \qquad (14.1)$$

Resolviendo la ecuación anterior:

$$3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

Si el enunciado anterior se modifica como sigue: "determinar un número cuyo triplo sea mayor que 6", se puede escribir:

$$3x > 6 \qquad (14.2)$$

Cualquier número mayor que 2 cumple con la desigualdad anterior y puede escribirse:

$$x > 2$$

Por tanto, la desigualdad $3x > 6$ tiene un número infinito de soluciones en el conjunto de los reales, contrario a lo que sucede con la relación (14.1), correspondiente a una ecuación, que sólo posee una solución.

A las relaciones como la (14.2), enlazadas por un símbolo de desigualdad y en las cuales se desea determinar el valor de la incógnita x , se les conoce con el nombre de **inecuaciones**. La expresión que queda del lado izquierdo del signo de desigualdad es el *primer miembro de la inecuación*, mientras que la que queda del lado derecho corresponde al *segundo miembro de la inecuación*.

Para resolver una inecuación de primer grado, donde la incógnita está elevada a la unidad, se utilizan procedimientos parecidos a los que se emplean para resolver

una ecuación. Las siguientes propiedades permiten resolver una inecuación:

1. *A los dos miembros de una inecuación se les puede sumar o restar cualquier número real sin que se altere el sentido de la desigualdad.*
2. *Los dos miembros de una inecuación pueden ser multiplicados o divididos por cualquier número real positivo sin que se altere el sentido de la desigualdad.*
3. *Si a todos los términos de una inecuación se le cambian sus signos, el sentido de la desigualdad también cambia.*

■ EJEMPLO 14.1

Utiliza las propiedades de las desigualdades para resolver:

a) $2x - 1 \geq x + 5$

b) $-\frac{x}{2} < \frac{x}{4} + 3$

Solución

a) Sumando 1 a ambos miembros y efectuando operaciones:

$$2x - 1 + 1 \geq x + 5 + 1 \Rightarrow 2x \geq x + 6$$

Restando x a ambos miembros:

$$2x - x \geq x + 6 - x \Rightarrow x \geq 6$$

b) Restando $\frac{x}{4}$ a ambos miembros:

$$-\frac{x}{2} - \frac{x}{4} < \frac{x}{4} + 3 - \frac{x}{4} \Rightarrow -\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right) < 3 \Rightarrow -\left(\frac{3x}{4}\right) < 3$$

Cambiando de signos a ambos miembros, cambia el signo de la desigualdad:

$$\frac{3x}{4} > -3$$

Multiplicando los dos miembros por $\frac{4}{3}$:

$$\frac{3x}{4} \cdot \frac{4}{3} > (-3) \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow x > -4$$

Las propiedades enunciadas anteriormente permiten simplificar la resolución de desigualdades. De ellas podemos deducir:

1. *Cualquier término de una inecuación puede ser trasladado (transpuesto) de un miembro a otro si se le cambia de signo.*

$$\text{Así:} \quad 3x + 1 > 7 \quad \Rightarrow \quad 3x > 7 - 1$$

2. *Si el coeficiente que acompaña a la incógnita la está multiplicando, puede pasarse al otro miembro dividiendo a lo que allí figura.*

$$\text{Así:} \quad 2x > 8 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{8}{2}$$

3. *Si el coeficiente que acompaña a la incógnita la está dividiendo, puede pasarse al otro miembro multiplicando a lo que allí figura.*

$$\text{Así:} \quad \frac{x}{2} < 5 \quad \Rightarrow \quad x < 2 \cdot 5$$

4. *Si se cambia el signo a ambos miembros de una inecuación, ésta altera su sentido.*

$$\text{Así:} \quad -3x + 10 \leq 15 \quad \Rightarrow \quad 3x - 10 \geq -15$$

■ EJEMPLO 14.2

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\text{a) } -9 \geq -x + 5$$

$$\text{b) } 2(x + 1) < -\frac{x}{2} + 4$$

Solución

- a) Pasando 5 al primer miembro:

$$-9 - 5 \geq -x \quad \Rightarrow \quad -14 \geq -x$$

Cambiando de signo a toda la inecuación:

$$14 \leq x \quad \Rightarrow \quad x \geq 14$$

Es decir, cualquier número mayor o igual que 14 cumple con la inecuación dada. Así, si $x = 20$ y sustituimos en la inecuación, tendremos:

$$-9 \geq -20 + 5 \quad \Rightarrow \quad -9 \geq -15$$

- b) Efectuando operaciones:

$$2x + 2 < -\frac{x}{2} + 4$$

Multiplicando ambos miembros por 2:

$$4x + 4 < -x + 8$$

Agrupando términos en x :

$$4x + x < 8 - 4 \Rightarrow 5x < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{5}$$

■ EJEMPLO 14.3

Resuelve las siguientes inecuaciones y señala los intervalos para las cuales son válidas las soluciones:

a) $2x - \frac{x+4}{3} > -x$

b) $\frac{2}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x+2}{20}$

c) $\sqrt{x+3} \geq 3$

d) $\sqrt{\frac{x+2}{2}} + 3 < 2$

Solución

a) $2x - \frac{x+4}{3} > -x \Rightarrow 6x - (x+4) > -3x \Rightarrow 6x - x - 4 > -3x$

Agrupando la incógnita x en el primer miembro:

$$6x - x + 3x > 4 \Rightarrow 8x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{8} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Luego, la solución es válida para el intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$.

b) El m.c.m. es 20, por tanto:

$$\frac{2}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x+2}{20} \Rightarrow 8 - 2x \leq x + 2$$

Agrupando la incógnita x en el primer miembro:

$$-2x - x \leq 2 - 8$$

Efectuando operaciones:

$$-3x \leq -6 \Rightarrow x \geq \frac{6}{3} \Rightarrow x \geq 2$$

c) Para eliminar la raíz cuadrada, elevamos ambos miembros a la segunda potencia:

$$(\sqrt{x+3})^2 \geq 3^2 \Rightarrow x+3 \geq 9 \Rightarrow x \geq 9-3 \Rightarrow x \geq 6$$

La solución es válida para el intervalo $[6, \infty)$.

d) Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{\frac{x+2}{2}+3}\right)^2 < 2^2 \Rightarrow \frac{x+2}{5}+3 < 4 \Rightarrow \frac{x+2}{5} < 1$$

Luego:

$$x+2 < 5 \Rightarrow x < 5-2 \Rightarrow x < 3$$

La solución es válida para el intervalo $(-\infty, 3)$.

■ EJEMPLO 14.4

Determina el conjunto de números reales tales que las raíces:

$$\text{a) } \sqrt{3(x-1)-\frac{1}{3}} \qquad \text{b) } \sqrt{\frac{x-3}{\sqrt{2}}+1}$$

sean también números reales.

Solución

Para que las funciones dadas sean reales es necesario que la cantidad subradical sea positiva, es decir, mayor que cero.

$$\text{a) } 3(x-1)-\frac{1}{3} > 0 \Rightarrow 3x-3-\frac{1}{3} > 0 \Rightarrow 9x-9-1 > 0$$

$$9x > 9+1 \Rightarrow 9x > 10 \Rightarrow x > \frac{10}{9}$$

$$\text{b) } \frac{x-3}{\sqrt{2}}+1 > 0 \Rightarrow x-3+\sqrt{2} > 0 \Rightarrow x > 3-\sqrt{2}$$

◆ EJERCICIOS

14.1 Utiliza las propiedades de las inecuaciones para resolver:

$$\text{a) } 2x-4 \leq 5x+2$$

$$\text{b) } \sqrt{2} + \frac{x}{2} \geq 2x$$

$$\text{c) } -5x+1 < 2x+20$$

$$\text{d) } -x \leq -\pi$$

Dibuja los intervalos donde son válidas las soluciones.

14.2 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x + \frac{1}{2} < -3x + 5$

b) $3x - 9 \geq 0$

c) $0 \leq -2x + \frac{x}{5} + 9$

d) $-1 + (x+1)(x-1) < x^2 + x$

e) $(x+1)^2 - 5 \geq 2$

f) $\sqrt{x+1} > 0$

En todos los casos grafica las soluciones en forma de intervalos.

14.3 Determina el conjunto de números reales tales que las raíces tengan soluciones reales:

a) $\sqrt{x+5}$

b) $\sqrt{-3x+4}$

c) $\sqrt{2x - \frac{1}{2}(x+1)}$

14.2 INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VALOR ABSOLUTO

Cuando estudiamos ecuaciones de la forma $|ax + b|$ encontramos que las soluciones podrán obtenerse a partir de las relaciones:

$$ax + b = c$$

$$ax + b = -c$$

Consideremos ahora relaciones del tipo:

$$|x| \leq a$$

$$|x| \geq a$$

la primera de ellas, $|x| \leq a$, tiene como soluciones:

$$|x| \leq a \quad \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$$

Es decir, la solución de la inecuación $|x| \leq a$ es el conjunto de los números reales comprendidos en el intervalo $[-a, a]$. Esto se muestra en la fig. 14.1.

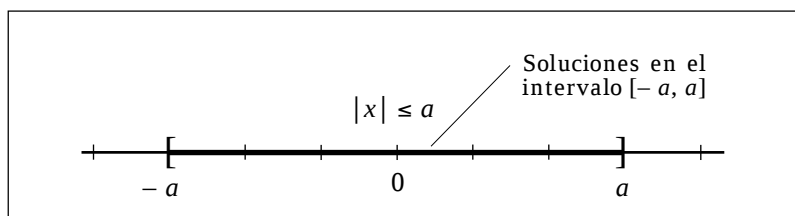


Fig. 14.1 Las soluciones de la inecuación $|x| \leq a$ están en el intervalo $[-a, a]$.

De manera similar, la relación $|x| \geq a$ tiene como soluciones:

$$|x| \geq a \quad \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

Luego, la solución de la inecuación $|x| \geq a$ es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que $-a$. En la fig. 14.2 se muestra gráficamente la solución.

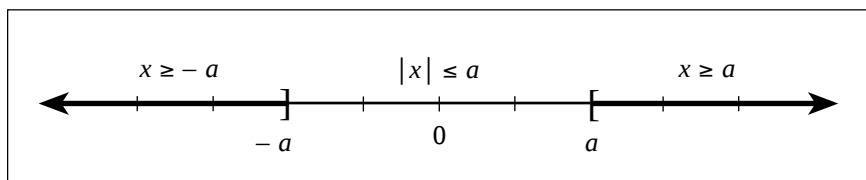


Fig. 14.2 Las soluciones de la inecuación $|x| \geq a$ corresponden a la unión de los intervalos $(-\infty, -a]$ y $[a, \infty)$.

En general, para inecuaciones de la forma:

$$|ax + b| \leq c \quad |ax + b| \geq c$$

Las soluciones se obtienen resolviendo las inecuaciones:

$$|ax + b| \leq c \quad \begin{cases} ax + b \leq c \\ ax + b \geq -c \end{cases} \quad |ax + b| \geq c \quad \begin{cases} ax + b \geq c \\ ax + b \leq -c \end{cases}$$

Los siguientes ejemplos explican el método a utilizar en la resolución de inecuaciones de primer grado.

■ EJEMPLO 14.5

Determina el valor de x en las siguientes inecuaciones:

$$\text{a) } |x - 5| < 3 \quad \text{b) } |2x + 3| > 1 \quad \text{c) } |3x - 2| \leq 7$$

En todos los casos, dibuja el intervalo donde la solución es válida.

Solución

$$\text{a) } |x - 5| < 3 \quad \begin{cases} x - 5 < 3 \Rightarrow x < 3 + 5 \Rightarrow x < 8 \\ x - 5 > -3 \Rightarrow x > 5 - 3 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

Es decir, la solución corresponde a valores de x tales que:

$$2 < x < 8 \Rightarrow (2, 8)$$

En la fig. 14.3 se muestra la solución.

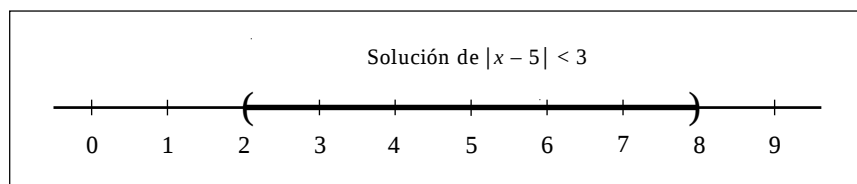


Fig. 14.3 Solución de la inecuación $|x - 5| < 3$.

$$\text{b) } |2x + 3| > 1 \quad \begin{cases} 2x + 3 > 1 \Rightarrow 2x > 1 - 3 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow x > -1 \\ 2x + 3 < -1 \Rightarrow 2x < -1 - 3 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

Entonces, la solución corresponde a valores de x en el intervalo:

$$(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$$

En la fig. 14.4 se indica la solución.

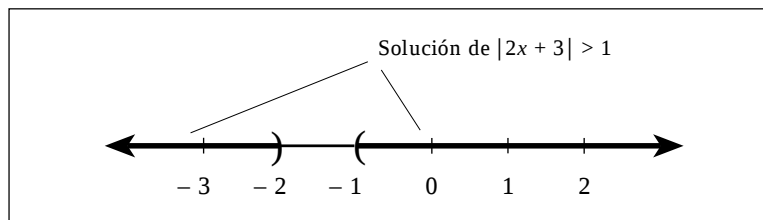


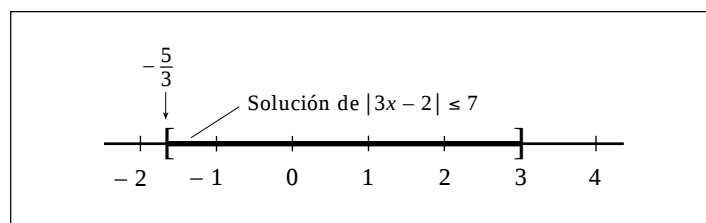
Fig. 14.4 Solución de la inecuación $|2x + 3| > 1$.

$$\text{c) } |3x - 2| \leq 7 \quad \begin{cases} 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow 3x \leq 7 + 2 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3 \\ 3x - 2 \geq -7 \Rightarrow 3x \geq -7 + 2 \Rightarrow 3x \geq -5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Luego, la solución corresponde a valores de x tales que:

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq 3 \Rightarrow \left[-\frac{5}{3}, 3\right]$$

La fig. 14.5 muestra la solución.

Fig. 14.5 Solución de la inecuación $|3x - 2| \leq 7$.**EJEMPLO 14.6**

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\left| 3x - 2 - \frac{1-x}{3} \right| \geq 1$

b) $-3 \left| 5 - \frac{x}{2} \right| \geq -9$

Solución

$$\text{a) } \left| 3x - 2 - \frac{1-x}{3} \right| \geq 1 \quad \begin{cases} 3x - 2 - \frac{1-x}{3} \geq 1 \\ 3x - 2 - \frac{1-x}{3} \leq -1 \end{cases}$$

Se tiene:

$$3x - 2 - \frac{1-x}{3} \geq 1 \Rightarrow 9x - 6 - 1 + x \geq 3 \Rightarrow 10x \geq 10 \Rightarrow x \geq 1$$

$$3x - 2 - \frac{1-x}{3} \leq -1 \Rightarrow 9x - 6 - 1 + x \leq -3 \Rightarrow 10x \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{2}{5}$$

Los valores de x que satisfacen la inecuación corresponden a:

$$\left(-\infty, \frac{2}{5}\right] \cup (1, \infty)$$

En la fig. 14.6 se muestra gráficamente la solución.

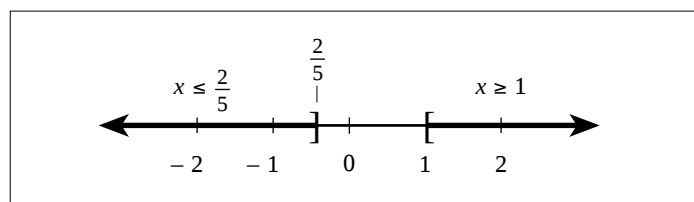


Fig. 14.6 Solución de la inecuación .

b) Dividiendo la inecuación dada por -3 : $\left|5 - \frac{x}{2}\right| \leq 3$

Observa que el signo de la inecuación cambió de $\geq$ a $\leq$. Podemos ahora escribir:

$$\left|5 - \frac{x}{2}\right| \leq 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 - \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow 10 - x \leq 6 \Rightarrow -x \leq -4 \Rightarrow x \geq 4 \\ 5 - \frac{x}{2} \geq -3 \Rightarrow 10 - x \geq -6 \Rightarrow -x \geq -16 \Rightarrow x \leq 16 \end{array} \right.$$

Los valores de x que satisfacen la inecuación son:

$$4 \leq x \leq 16 \Rightarrow [4, 16]$$

◆ EJERCICIOS

14.4 Resuelve las siguientes inecuaciones y representa su solución gráficamente y en forma de intervalos:

a) $|x| < 3$

b) $|x| \geq 4$

c) $|5x - 6| \leq 9$

d) $|2x + 1| \geq 0$

e) $\left|\frac{4x}{5} - 2\right| \leq 1$

f) $\left|\frac{x}{2} + 1\right| < 3$

14.5 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x + \sqrt{2}| \geq \pi$

b) $|10x - 4| \leq 1$

c) $-2|4x - 3| > -4$

d) $\left|3(x - 2) + \frac{1}{4}\right| < 2$

e) $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1 - 3x$

f) $5 + x \leq |2x - 4|$

14.3 SISTEMA DE INECUACIONES

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones con una solución común. Así, las siguientes inecuaciones forman un sistema:

$$\begin{cases} x + 5 \leq 11 \\ 2x - 1 > 7 \end{cases}$$

Para resolver un sistema de inecuaciones se procede de la manera siguiente:

1. Se resuelve cada una de las inecuaciones del sistema por separado. De esta manera, se obtienen los intervalos donde son válidas las soluciones de cada inecuación.

2. Se halla la intersección de los intervalos determinados para cada inecuación. Dicha intersección será la solución del sistema de inecuaciones.

■ EJEMPLO 14.7

Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 5 \leq 11 \\ 2x - 1 > 7 \end{cases}$$

Solución

$$x + 5 \leq 11 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow (-\infty, 6]$$

$$2x - 1 > 7 \Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow (4, \infty)$$

En la fig. 14.7 se muestran los dos intervalos. Su intersección,

$$(-\infty, 6] \cap (4, \infty) = (4, 6]$$

es la solución del sistema.

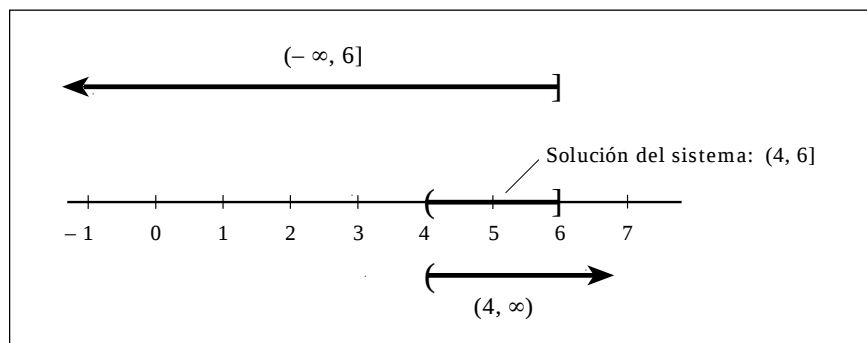


Fig. 14.7 Solución del sistema de inecuaciones del ejemplo 14.7.

■ EJEMPLO 14.8

Determina la solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} |x| < 4 \\ 2x - 5 \geq -3 \end{cases}$$

Solución

$$|x| < 4 \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow (-4, 4)$$

$$2x - 5 \geq -3 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow [1, \infty)$$

En la fig. 14.8 se muestran los intervalos correspondiente a las soluciones obtenidas. De la figura se tiene:

$$(-4, 4) \cap [1, \infty) = [1, 4)$$

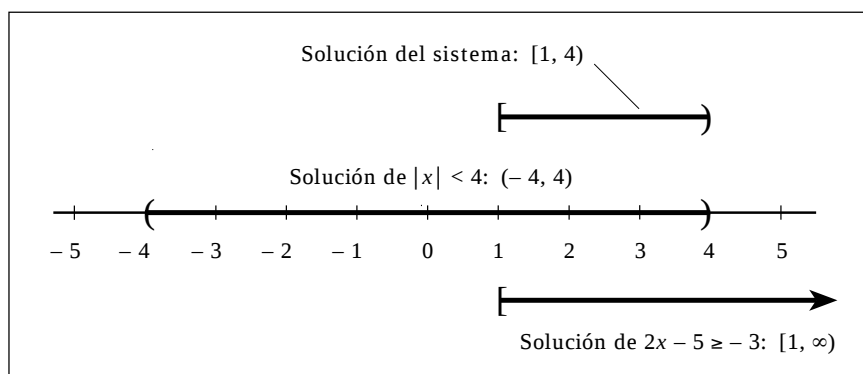


Fig. 14.8 Solución del sistema de inecuaciones del ejemplo 14.8.

◆ EJERCICIOS

14.6 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y grafica la solución:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - 2 < 4 \\ 2x + 13 > 15 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2 - x \geq -1 \\ -2x + 6 \leq -3x - 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 1 > -1 \\ 5x - 4 \leq 6 \end{cases} \end{array}$$

14.7 Determina la solución de los sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} |x| \geq 2 \\ 5x - 1 < 8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{3x - 2}{2} + 1 > -x \\ x - 6 < 2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} |x + 1| \leq 3 \\ 2x + 5 > 4 \end{cases} \end{array}$$

14.4 PROBLEMAS SOBRE INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Los siguientes ejemplos muestran problemas que conducen al planteamiento de inecuaciones de primer grado.

■ EJEMPLO 14.9

Un triángulo tiene base constante e igual a 4 m, ¿cuál debe ser la altura de ese triángulo

si el área del mismo tiene que ser mayor o igual que 20 m^2 ?

Solución

El área de un triángulo está dada por: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Como $b = 4$ y nos dicen que $A \geq 20$, se tiene:

$$\frac{4 \cdot h}{2} \geq 20 \Rightarrow h \geq \frac{2 \cdot 20}{4} \Rightarrow h \geq 10 \text{ m}$$

Es decir, para que el área sea mayor que 20 m^2 , la altura debe ser mayor que 10 m.

■ **EJEMPLO 14.10**

Un móvil se desplaza en línea recta con rapidez igual a 5 km/h. Si el espacio recorrido está dado por:

$$x = 5t - 2 \quad (t: \text{tiempo en horas})$$

determina el intervalo de tiempo para el cual el móvil está entre el kilómetro 22 y el kilómetro 33.

Solución

Como nos dan el intervalo de la distancia, podemos escribir:

$$22 \leq x \leq 33$$

como $x = 5t - 2$, nos queda:

$$22 \leq 5t - 2 \leq 33$$

La expresión anterior conduce al sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 5t - 2 \geq 22 \\ 5t - 2 \leq 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t \geq 24 \Rightarrow t \geq \frac{24}{5} \text{ h} \\ 5t \leq 35 \Rightarrow t \leq 7 \text{ h} \end{cases}$$

La solución, en horas, está representada por el intervalo: $\frac{24}{5} \leq t \leq 7$

■ **EJEMPLO 14.11**

La cuarta parte de un número añadida a los dos tercios del mismo es menor o igual a 22. ¿Cuál es el mayor número que satisface esta condición?

Solución

De acuerdo con el enunciado, podemos escribir:

$$\frac{x}{4} + \frac{2}{3}x \leq 22$$

Efectuando operaciones:

$$3x + 8x \leq 264 \Rightarrow 11x \leq 264 \Rightarrow x \leq 24$$

Luego, el mayor número que cumple con la condición dada es 24.

◆ EJERCICIOS

14.8 ¿Qué valores debe tener el radio de un círculo para que su área resulte menor o igual a 10 m^2 ?

14.9 Uno de los dos lados de un rectángulo mide 2 m. ¿Cuál debe ser el valor del otro lado para que su perímetro sea mayor que 7 m?

14.10 Un triángulo tiene una base igual a 3 m. ¿Cuál debe ser la altura h si el área del mismo debe ser menor que 20 m^2 ?

14.11 Un móvil se desplaza en línea recta con velocidad igual a 2 km/h. Si el espacio recorrido se puede expresar como:

$$x = 2t - 3 \quad (t: \text{tiempo en horas})$$

determina el intervalo para el cual el móvil está entre el kilómetro 37 y 65.

14.12 La tercera parte de un número añadido al mismo número es mayor o igual a 16. ¿Cuál es el menor número que satisface esta condición?

15.1 SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS EN EL PLANO REAL

Considera la fig. 15.1. Se trata de dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el punto 0. A tal configuración geométrica se le conoce con el nombre de *Sistema de Coordenadas Cartesianas* o *Sistema de Ejes Cartesianos*. Al eje horizontal 0X se le conoce como *eje de las abscisas*, mientras que al eje vertical 0Y se le denomina *eje de las ordenadas*. Es común también referirse a esos ejes como "eje de las X" y "eje de las Y". Al punto 0 se le llama *origen del sistema de coordenadas*. Las puntas de las flechas en la fig. 15.1 indican las direcciones de incremento sobre los ejes X y Y. Es decir, X aumenta de valor hacia la derecha, mientras Y aumenta de valor hacia arriba. Al plano, formado por eje de abscisas y ordenadas se le conoce como *plano real*, ya que contiene todos los elementos del conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales.

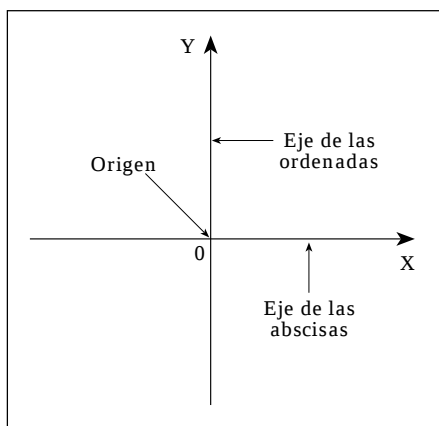


Fig. 15.1 Sistema de coordenadas cartesianas.

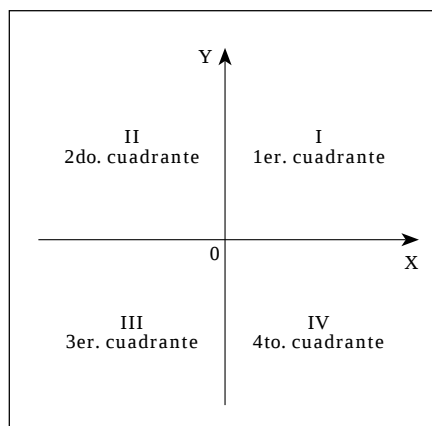


Fig. 15.2 Cuadrantes en un Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Los ejes de coordenadas dividen al plano cartesiano en 4 partes llamadas *cuadrantes*. Tenemos así, como se indica en la fig. 15.2, el primero (I), segundo (II), tercero (III) y cuarto (IV) cuadrante. Observa que los cuadrantes se definen en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

El eje de las abscisas en el sistema de coordenadas cartesianas es semejante a la recta real ya estudiada por tí. A la derecha del origen se representan los números positivos mientras que a la izquierda del origen se representan los números negativos. De manera similar, los puntos que están por arriba del origen sobre el

eje de las ordenadas representan los números positivos, mientras que los puntos que están por debajo del origen sobre el eje de las ordenadas representan los números negativos.

15.2 COORDENADAS DE UN PUNTO

Imaginemos un punto P situado en el plano definido por el sistema de coordenadas de la fig. 15.3. ¿Cómo podemos establecer con precisión la ubicación de P en el plano? Una forma es asociar cada punto con un par ordenado (a, b) , donde la primera componente, a , está relacionada con el eje X y se le denomina *abscisa del punto*, mientras que la segunda componente, b , se relaciona con el eje Y y se le denomina *ordenada del punto*. La abscisa y la ordenada corresponden a las *coordenadas del punto*. Tanto la abscisa como la ordenada de un punto puede tener un valor positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante donde esté situada. De lo dicho anteriormente, puede deducirse lo siguiente:

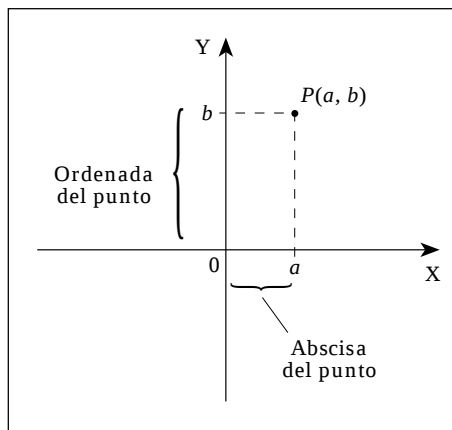


Fig. 15.3 Coordenadas de un punto.

1. A cada punto P del plano real, le corresponde un par ordenado.
2. Dado un par ordenado (a, b) en el plano real, existe sólo un punto con esas coordenadas.

Al punto P se le puede representar simbólicamente como $P(x, y)$, donde x y y son la abscisa y la ordenada de P . Así, por ejemplo, podemos escribir:

$$\begin{array}{ll}
 P(3, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Abscisa: } 3 \\ \text{Ordenada: } 4 \end{array} \right. & P(-3, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Abscisa: } -3 \\ \text{Ordenada: } 4 \end{array} \right. \\
 P(-3, -4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Abscisa: } -3 \\ \text{Ordenada: } -4 \end{array} \right. & P(3, -4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Abscisa: } 3 \\ \text{Ordenada: } -4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Los siguientes ejemplos se refieren a la ubicación de puntos en el plano. Es conveniente que uses papel cuadriculado o milimetrado para facilitar la solución

de los ejemplos y ejercicios.

■ EJEMPLO 15.1

Determina la ubicación en el plano cartesiano de los siguientes puntos:

$P_1(3, 2)$

$P_2(-2, -4)$

$P_3(-3, 3)$

$P_4(1, -2)$

Solución

La fig. 15.4 muestra la ubicación de los puntos dados.

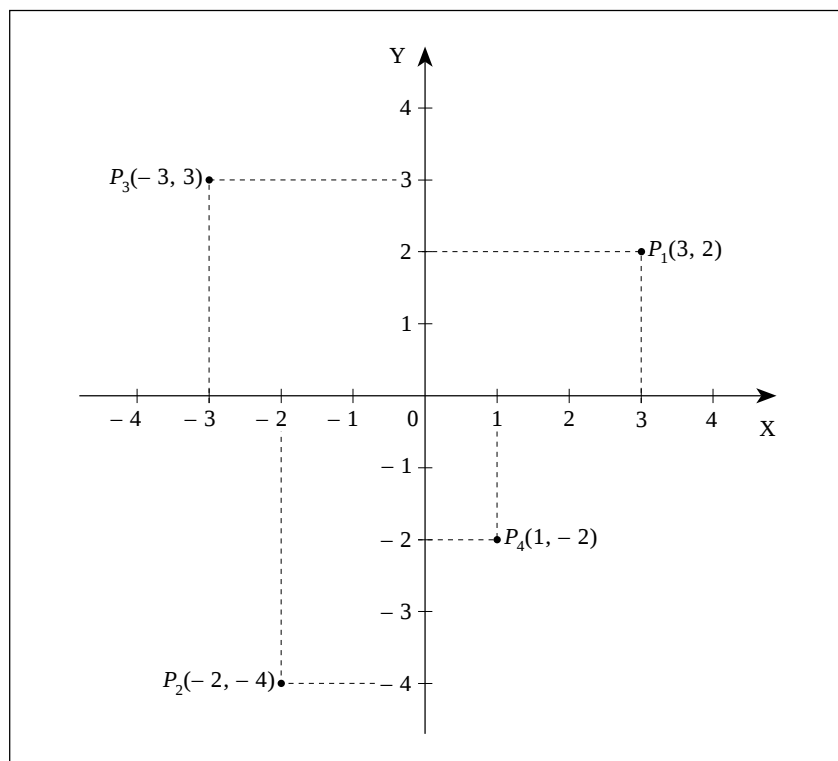


Fig. 15.4 Ubicación de los puntos $(3, 2)$, $(-2, -4)$, $(-3, 3)$, $(1, -2)$ en un plano cartesiano. Ejemplo 15.1.

15.3 PUNTOS NOTABLES EN UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

- a) **Coordenadas del origen:** el punto 0, origen del sistema de coordenadas cartesianas, tiene abscisa cero y ordenada cero y por tanto, puede escribirse como $P(0, 0)$.

- b) **Coordenadas de un punto situado sobre el eje de las abscisas:** cualquier punto situado sobre el eje X tiene como ordenada cero y por tanto, puede escribirse como $P(x, 0)$.
- c) **Coordenadas de un punto situado sobre el eje de las ordenadas:** cualquier punto situado sobre el eje Y tiene como abscisa cero y por tanto, puede escribirse como $P(0, y)$.

■ EJEMPLO 15.2

Ubica los siguientes puntos sobre un eje de coordenadas rectangulares:

$$P_1(0, 0)$$

$$P_2(3, 0)$$

$$P_3(0, 3)$$

$$P_4(-2, 0)$$

Solución

El punto P_1 corresponde al origen de coordenadas.

El punto P_2 está sobre el eje X, ya que tiene ordenada cero.

El punto P_3 está sobre el eje Y, ya que tiene abscisa cero.

El punto P_4 está sobre el eje X, ya que tiene ordenada cero.

En la fig. 15.5 se muestra la ubicación de los puntos dados.

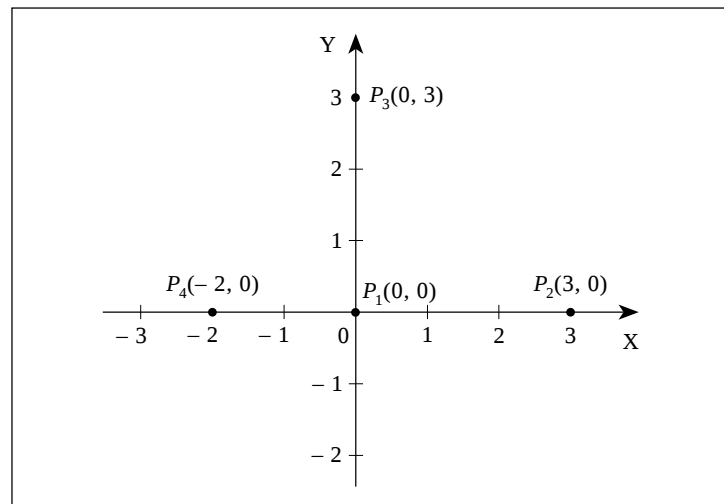


Fig. 15.5 Ubicación de los puntos $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$ y $(-2, 0)$ en el plano cartesiano.

■ EJEMPLO 15.3

Dibuja el triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(2, 3)$, $P_2(1, 1)$ y $P_3(-2, 2, 5)$.

Solución

En la fig. 15.6 se muestra la solución. Una vez ubicados los puntos en el plano cartesiano, se procede a la unión de los mismos para obtener el triángulo.

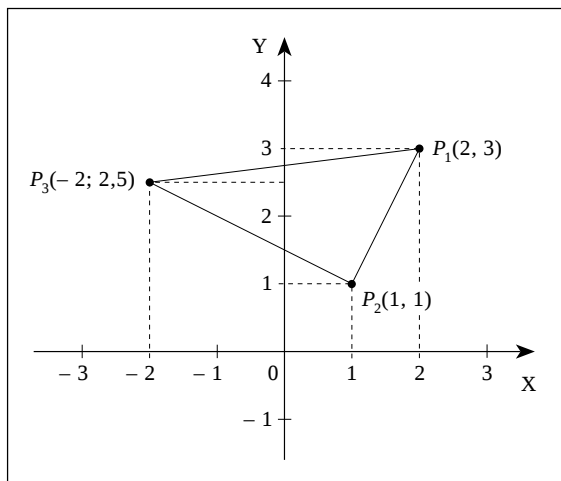


Fig. 15.6 Triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(2, 3)$, $P_2(1, 1)$ y $P_3(-2, 2, 5)$. Ejemplo 15.3.

■ EJEMPLO 15.4

Dibuja la línea recta que pasa por los puntos $P_1(0, 2)$ y $P_2(-2, -2)$.

Solución

La figura 15.7 muestra la solución. El punto P_1 está sobre el eje Y por tener abscisa 0.

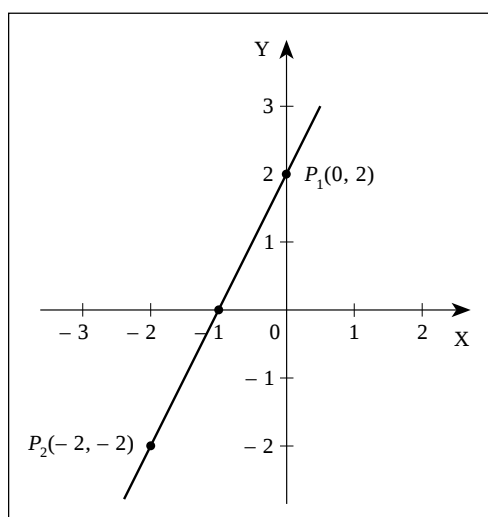


Fig. 15.7 Línea recta que pasa por los puntos $P_1(0, 2)$ y $P_2(-2, -2)$. Ejemplo 15.4.

◆ EJERCICIOS

En los ejercicios que siguen, utiliza papel cuadriculado o milimetrado.

15.1 Dibuja la ubicación en el plano de los siguientes puntos:

$$\begin{array}{cccc} P_1(1, 3) & P_2(-1, 3) & P_3(-2, -3) & P_4(3, -2) \\ P_5(0, 2) & P_6(-2, 0) & P_7(0, -4) & P_8(3, 0) \end{array}$$

15.2 Ubica los siguientes puntos en el plano:

$$P_1(10, 30) \quad P_2(-5, 10) \quad P_3(50, -40) \quad P_4(-20, -50)$$

15.3 Ubica los siguientes puntos en el plano:

$$P_1\left(1, \frac{1}{3}\right) \quad P_2\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad P_3\left(-\frac{1}{4}, 2\right) \quad P_4\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

15.4 Dibuja los triángulos cuyos vértices son:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & P_1(0, 0) & P_2(1, 3) \quad P_3(-2, 1) \\ \text{b)} & P_1(1, 0) & P_2(-2, 0) \quad P_3(0, -2) \end{array}$$

15.5 Determina las figuras que se forman al unir los siguientes puntos:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & P_1(1, 2) & P_2(4, 2) & P_3(1, -1) \quad P_4(4, -1) \\ \text{b)} & P_1(-1, 1) & P_2(3, 1) & P_3(3, -2) \quad P_4(-1, -2) \\ \text{c)} & P_1(0, 3) & P_2(2, 1) & P_3(0, -1) \quad P_4(-2, 1) \end{array}$$

15.6 Dibuja las líneas rectas que pasan por los puntos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & P_1(2, 1) \quad P_2(0, 3) \quad \text{b)} \quad P_1(1, 3) \quad P_2(1, -2) \\ \text{c)} & P_1(0, 0) \quad P_2(3, 2) \quad \text{d)} \quad P_1(-2, 0) \quad P_2(1, 0) \end{array}$$

15.7 Determina gráficamente el punto de intersección de las rectas que pasan por los puntos:

$$\begin{array}{ll} \text{Recta 1:} & P_1(0, 3) \quad P_2(3, 0) \\ \text{Recta 2:} & P_1(0, 0) \quad P_2(4, 2) \end{array}$$

15.4 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO REAL

Considera los puntos $P_1(x_1, y_2)$ y $P_2(x_2, y_1)$ situados en cualquier parte del plano real, tal como se muestra en la fig. 15.8. La distancia entre los puntos P_1 y P_2 , denotada como $d(P_1P_2)$, puede calcularse mediante el Teorema de Pitágoras, que se estudió en el objetivo 1. De la fig. 15.8, podemos escribir:

$$a = x_2 - x_1 \quad b = y_2 - y_1$$

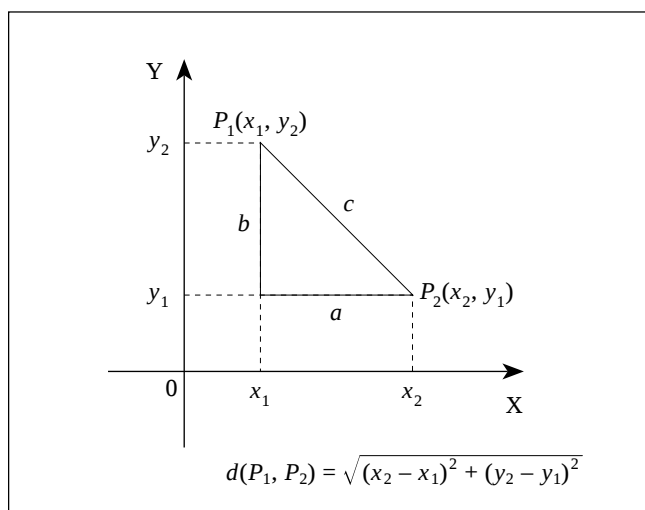


Fig. 15.8 Distancia entre dos puntos del plano real.

Según el Teorema de Pitágoras:

$$d(P_1P_2) = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Luego:

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (15.1)$$

■ EJEMPLO 15.5

Determina la distancia entre los puntos dados:

a) $P_1(3, 1); P_2(1, 4)$

b) $P_3(-1, 1); P_4(1, 2)$

Solución

En la fig. 15.9 se representan los puntos dados

$$\text{a) } d(P_1, P_2) = \sqrt{(1-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3,60$$

$$\text{b) } d(P_3, P_4) = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2,23$$

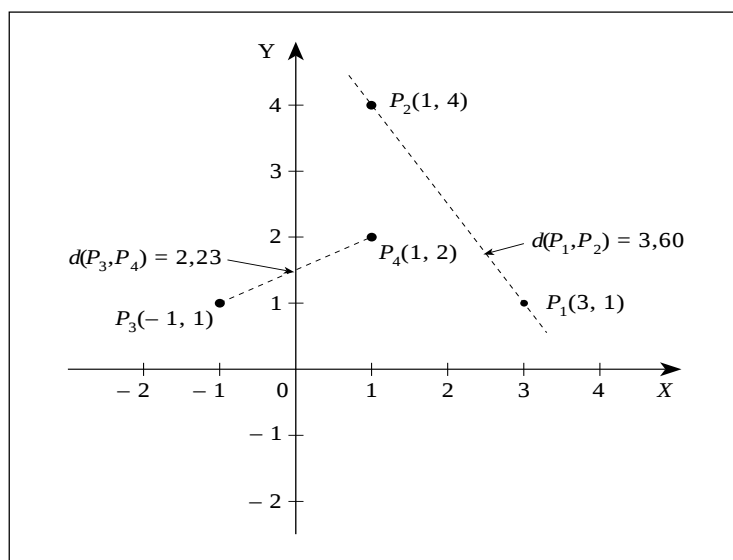


Fig. 15.9 Distancia entre los puntos P_1 , P_2 y P_3 , P_4 del ejemplo 15.5.

■ EJEMPLO 15.6

Determina el perímetro y el área del triángulo cuyas coordenadas son:

$$P_1(1, 4)$$

$$P_2(1, 1)$$

$$P_3(4, 1)$$

Solución

En la fig. 15.10 se representan los puntos dados.

A fin de determinar el perímetro, debemos calcular las distancias a , b y c .

$$a = 4 - 1 = 3$$

$$b = 4 - 1 = 3$$

$$c = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 4,24$$

Luego, el perímetro es:

$$\text{Perímetro} = 3 + 3 + 4,24 = 10,24$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2} b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$$

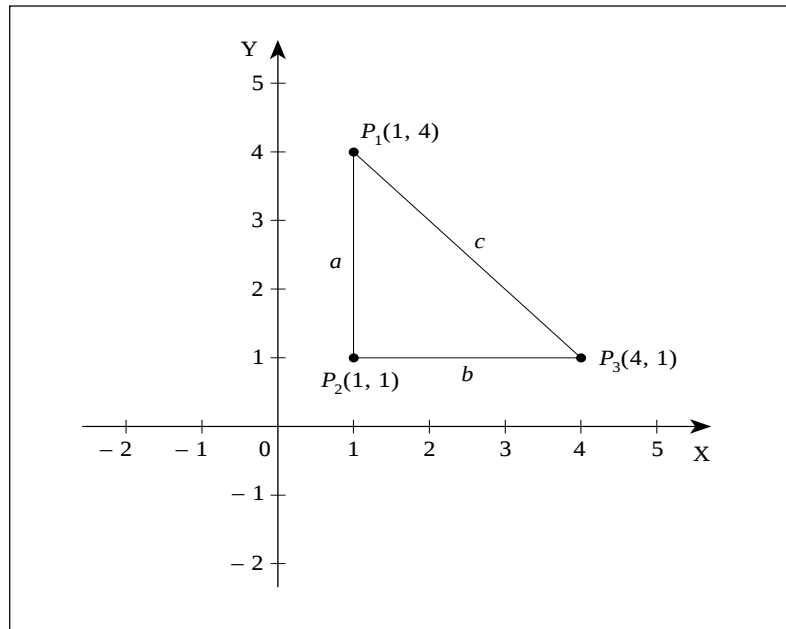


Fig. 15.10 Determinación del perímetro y el área del triángulo definido por los puntos P_1 , P_2 y P_3 . Ejemplo 15.6.

■ EJEMPLO 15.7

Los vértices de una figura geométrica son los puntos:

$$a(2, 2)$$

$$b(2, 5; -1)$$

$$c(0, -2)$$

$$d(-2, 0)$$

- a) Dibuja la figura determinada por dichos puntos. b) Calcula la longitud de sus diagonales.

Solución

- a) En la fig. 15.11 se muestra la figura geométrica que se forma. Se trata de un cuadrilátero.

- b) Las distancias entre los puntos a y c y entre los puntos b y d corresponden a las longitudes de las diagonales:

$$d_{ac} = \sqrt{(2-0)^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4,47$$

$$d_{bd} = \sqrt{(-2-2,5)^2 + [0-(-1)]^2} = \sqrt{4,5^2 + 1^2} = \sqrt{21,25} = 4,60$$

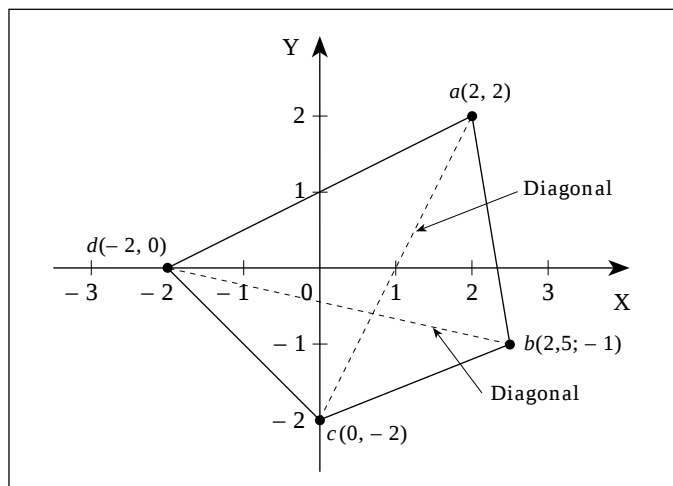


Fig. 15.11 Ejemplo 15.7.

◆ EJERCICIOS

15.8 Determina las distancias entre los puntos dados:

- | | | | |
|-----------------|--------------|------------------|--------------|
| a) $P_1(0, 0)$ | $P_2(3, 5)$ | b) $P_1(1, -2)$ | $P_2(0, 1)$ |
| c) $P_1(3, 0)$ | $P_2(0, -5)$ | d) $P_1(-3, -4)$ | $P_2(1, 2)$ |
| e) $P_1(-2, 4)$ | $P_2(2, 4)$ | f) $P_1(3, 0)$ | $P_2(-5, 0)$ |

15.9 Determina el perímetro y el área del triángulo cuyas coordenadas son:

$$P_1(0, 0) \qquad P_2(-3, 0) \qquad P_3(0, 5)$$

15.10 Determina el perímetro del triángulo cuyos extremos son los puntos:

$$a(2, 0) \qquad b(2,5; 1,5) \qquad c(1,3; 5)$$

¿De qué tipo de triángulo se trata?

15.11 Los vértices de una figura geométrica son:

$$a(-3, 0) \qquad b(4, 3) \qquad c(-2, 2) \qquad d(0, 4)$$

Dibuja la figura geométrica resultante y determina la longitud de sus diagonales.

16

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE
FUNCIONES

16.1 FUNCIONES

El concepto de función ya fue estudiado por ti en octavo grado. Considera la fig. 16.1 donde A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada; x es un elemento cualquiera de A , mientras que y es su imagen en B . Por definición, una función cumple con las siguientes condiciones:

- a) Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes en el conjunto de llegada.
- b) Cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen en el conjunto de llegada.

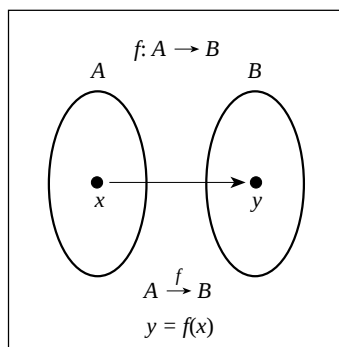


Fig. 16.1 Notaciones empleadas para representar una función.

Una función puede ser representada usando las siguientes notaciones:

$$f: A \rightarrow B \quad A \xrightarrow{f} B \quad y = f(x)$$

La última notación, $y = f(x)$, se lee como "y es una función de x", y f significa las operaciones que han de efectuarse sobre un elemento cualquiera x , del conjunto A para obtener su imagen, y , en el conjunto B . Así, si la expresión de la función $y = f(x)$ es:

$$y = f(x) = x^2$$

se está diciendo que todos los elementos del conjunto A deben ser elevados al cuadrado para obtener las imágenes correspondientes en el conjunto B .

■ EJEMPLO 16.1

Indica cuál de las relaciones de la fig. 16.2 son funciones. Justifica tu respuesta.

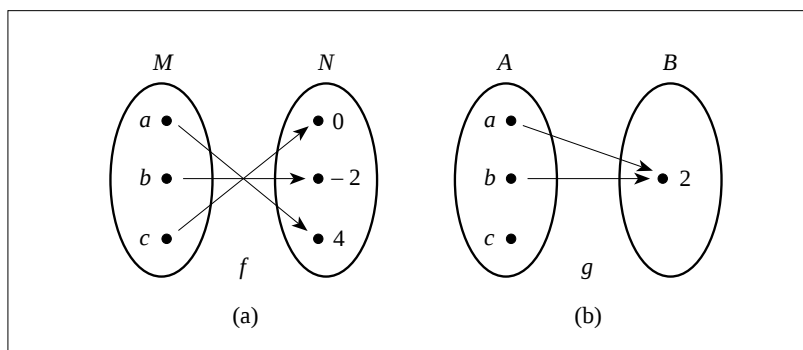


Fig. 16.2 Ejemplo 16.1.

Solución

a) La relación f es una función porque todos los elementos del conjunto de partida, M , tienen una y sólo una imagen en el conjunto N de llegada. Si escribimos la relación f como pares ordenados, tendremos:

$$f = \{(a, 4), (b, -2), (c, 0)\}$$

donde ningún primer componente aparece dos veces.

b) La relación g no es una función, porque el elemento c del conjunto de partida no tiene imagen en el conjunto de llegada.

16.2 FUNCIÓN REAL. DOMINIO Y RANGO.

Dado el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales y un conjunto cualquiera A , se denomina *función real* a aquella cuyo dominio es A y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbf{R}$. De acuerdo a lo anterior, una función real puede ser denotada como:

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}$$

Observa que la definición anterior contempla un conjunto cualquiera A . Si en particular A es un subconjunto de $\mathbf{R}$, la función f es una función real de una variable real y se representa simbólicamente como:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Al conjunto de los elementos de A que intervienen en la función, se le denomina *dominio* de A , mientras que al conjunto de los elementos de $\mathbf{R}$ que están en correspondencia con los del conjunto A , se les denomina *rango* o *imagen* de la función.

■ EJEMPLO 16.2

Sea $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ una función definida en $\mathbf{R}$ tal que:

$$f(x) = x + 3$$

si $A = \{-4, 0, 2\}$, ¿cuál es el dominio y rango de la función?

Solución

El dominio de la función está formado por los elementos del conjunto A :

$$D_f = \{-4, 0, 2\}$$

Para determinar el rango de f , sustituimos los valores de x en $f(x)$:

$$x = -4 \quad \Rightarrow \quad f(-4) = -4 + 3 = -1$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 + 3 = 3$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2 + 3 = 5$$

Entonces, el rango de f es el conjunto $\{-1, 3, 5\}$ perteneciente al conjunto $\mathbf{R}$:

$$R_f = \{-1, 3, 5\}$$

■ EJEMPLO 16.3

Determina el dominio y el rango de la función real:

$$f(x) = \sqrt{3-x}$$

Solución

Para que la función sea real, es necesario que la cantidad subradical sea mayor o igual que cero:

$$3 - x \geq 0$$

De la solución anterior, se puede deducir:

$$3 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \geq -3 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3$$

Es decir, $f(x)$ existe para todos los valores de x menores o iguales a 3. Estos valores conforman el dominio de la función:

$$D_f = (-\infty, 3]$$

Si, como establecimos anteriormente, $3 - x \geq 0$, la raíz cuadrada de $3 - x$, que es igual a $f(x)$,

también es mayor o igual que cero:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 0$$

Es decir, $f(x)$ comprende a todos los números reales positivos incluyendo el cero. Podemos también escribir:

$$\text{Rango de } f = R_f = R^+ \cup \{0\}$$

◆ EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes f es una función de una variable real.

16.1 Si $A = \{-2, 0, 5, 3\}$ y $f(x) = 2x - 1$, determina el dominio y rango de la función.

16.2 Determina el dominio y rango de las funciones:

a) $y = \sqrt{2-x}$

b) $y = \sqrt{2x+3}$

c) $f(x) = \sqrt{4-x}$

16.3 Determina el dominio y rango de las funciones:

a) $y = \frac{1}{1-x}$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

16.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Dada una función $y = f(x)$, es posible representarla gráficamente asignándole valores convenientes a la variable x y obteniendo los valores correspondientes de la función y .

En efecto, los distintos valores de x pueden ser asociados con valores sobre el eje de las abscisas, mientras que los correspondientes valores de $f(x)$ pueden asociarse con valores sobre el eje de las ordenadas. Los pares ordenados así obtenidos $[x, f(x)]$, representan puntos sobre el plano cartesiano que constituyen el gráfico de la función.

La forma de la gráfica de una función depende del tipo de función. Así la gráfica de una función de primer grado es distinta a la de una función de segundo grado. A continuación, estudiaremos la representación gráfica de algunas funciones notables y sus características.

16.3.1 La función afín

La representación gráfica de la función afín en el plano real es una línea recta. La forma general de esta función es:

$$y = f(x) = mx + b$$

Como el exponente de la variable x es 1, la función afín es una función de primer grado. Considera la función afín:

$$y = f(x) = x + 2$$

A fin de representar gráficamente esta función, le damos algunos valores como se muestra en la tabla siguiente:

Valor de x	Valor de y	Puntos en el plano real
$x = -2$	$y = 0$	$P(-2, 0)$
$x = -1$	$y = 1$	$P(-1, 1)$
$x = 0$	$y = 2$	$P(0, 2)$
$x = 1$	$y = 3$	$P(1, 3)$
$x = 2$	$y = 4$	$P(2, 4)$

En la fig. 16.3 se muestra el gráfico de la función para los puntos dados. Si se unen dichos puntos, encontramos la línea recta correspondiente a la función. Es importante hacer notar que para dibujar el gráfico de una función afín, basta con determinar sólo dos puntos del plano real que pertenezcan a dicha función.

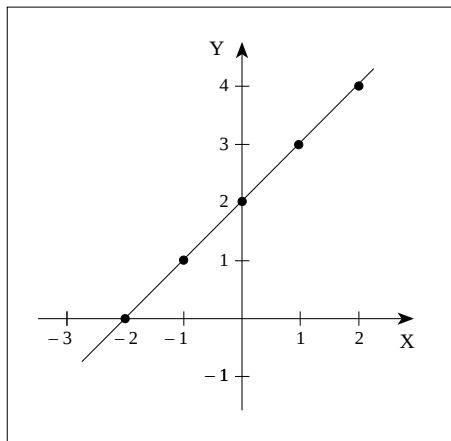


Fig. 16.3 Gráfico de la función $y = x + 2$.

Como puede verse de la fig. 16.3, a la variable x puede asignársele cualquier valor en el conjunto de los números reales. Es decir, su dominio es $\mathbf{R}$:

$$\text{Dominio } f(x) = \{-\infty, \infty\}$$

Como la función está definida para cualquier valor real de x , su rango es también

el conjunto de los reales:

$$\text{Rango } f(x) = \{-\infty, \infty\}$$

Las características descritas son comunes a cualquier función afín:

$$\text{Función Afín} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dominio: } \mathbf{R} \\ \text{Rango: } \mathbf{R} \quad (m \neq 0) \\ \text{Representación gráfica: línea recta} \end{array} \right.$$

16.3.2 La función cuadrática

La representación gráfica de la función cuadrática es una curva llamada *parábola* cuya forma general es:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Como el mayor exponente de la variable es 2, la función cuadrática es una función de segundo grado. En algunos casos, los coeficientes b y/o c pueden ser iguales a cero, originando funciones de la forma:

$$y = ax^2 + bx \qquad y = ax^2 + c$$

Considera la función cuadrática:

$$y = f(x) = x^2 - 1$$

Dándole valores a x obtenemos los valores correspondientes a $f(x)$:

Valor de x	Valor de y	Puntos en el plano real
$x = -2$	$y = (-2)^2 - 1 = 3$	$P(-2, 3)$
$x = -1$	$y = (-1)^2 - 1 = 0$	$P(-1, 0)$
$x = 0$	$y = 0^2 - 1 = -1$	$P(0, -1)$
$x = 1$	$y = 1^2 - 1 = 0$	$P(1, 0)$
$x = 2$	$y = 2^2 - 1 = 3$	$P(2, 3)$

En la fig. 16.4 se muestran los puntos obtenidos. Si estos puntos se unen, se obtiene la parábola correspondiente a la función $y = x^2 - 1$.

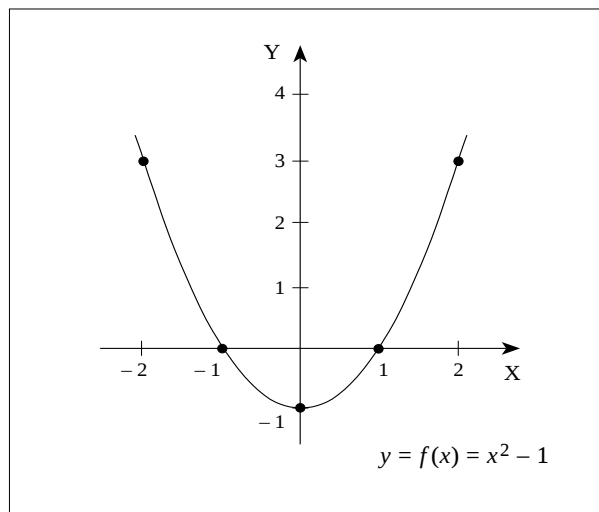


Fig. 16.4 Gráfico de la función $y = x^2 - 1$.

Encontramos que x puede asumir cualquier valor en $\mathbf{R}$, mientras que en este caso, $f(x)$ toma valores igual o mayores que -1 :

$$\text{Función Cuadrática} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dominio: } \mathbf{R} \\ \text{Rango: } [-1, \infty) \text{ (Para el caso estudiado)} \\ \text{Representación gráfica: Parábola} \end{array} \right.$$

Observa, que, contrario a lo que sucede con la función afín, dos puntos no bastan para dibujar la función cuadrática.

16.3.3 La función hiperbólica

La representación gráfica de una función hiperbólica es una curva llamada *hipérbola rectangular*. En su forma más simple, la función hiperbólica tiene la forma:

$$y = f(x) = \frac{a}{x} = ax^{-1}$$

Consideremos la representación gráfica de la función:

$$y = \frac{2}{x}$$

Si damos valores a x obtenemos la siguiente tabla:

Valor de x	Valor de y	Puntos en el plano real
1	2	$P(1, 2)$
2	1	$P(2, 1)$
4	$\frac{1}{2}$	$P(4, \frac{1}{2})$
6	$\frac{1}{3}$	$P(6, \frac{1}{3})$
$\frac{1}{2}$	4	$P(\frac{1}{2}, 4)$
$\frac{1}{3}$	6	$P(\frac{1}{3}, 6)$
$\frac{1}{4}$	8	$P(\frac{1}{4}, 8)$
-1	-2	$P(-1, -2)$
-2	-1	$P(-2, -1)$
-4	$-\frac{1}{2}$	$P(-4, -\frac{1}{2})$
-6	$-\frac{1}{3}$	$P(-6, -\frac{1}{3})$
$-\frac{1}{2}$	-4	$P(-\frac{1}{2}, -4)$
$-\frac{1}{3}$	-6	$P(-\frac{1}{3}, -6)$
$-\frac{1}{4}$	-8	$P(-\frac{1}{4}, -8)$

Un gráfico de la función conduce a la curva de la fig. 16.5. De dicha figura puede observarse que a x nunca puede asignársele el valor cero, ya que la función $f(x)$ no está definida ($y = \frac{2}{0}$) para $x = 0$. Es decir, x puede asumir cualquier valor real distinto de cero y por tanto el dominio de $f(x)$ es:

$$\text{Dom. } f(x) = \mathbf{R} - \{0\} = \mathbf{R}^*$$

Del gráfico de $f(x)$ también se ve que dicha función nunca alcanza el valor cero y por tanto:

$$\text{Rango } f(x) = \mathbf{R} - \{0\} = \mathbf{R}^*$$

◆ EJERCICIOS

16.4 Dibuja el gráfico correspondiente a las funciones dadas:

a) $y = 2x - 2$

b) $y = 3x - 4$

c) $y = -5 + x$

16.5 Dibuja el gráfico correspondiente a las funciones dadas:

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 + 2$

c) $y = -x^2 + 2$

16.6 Dibuja el gráfico de las funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

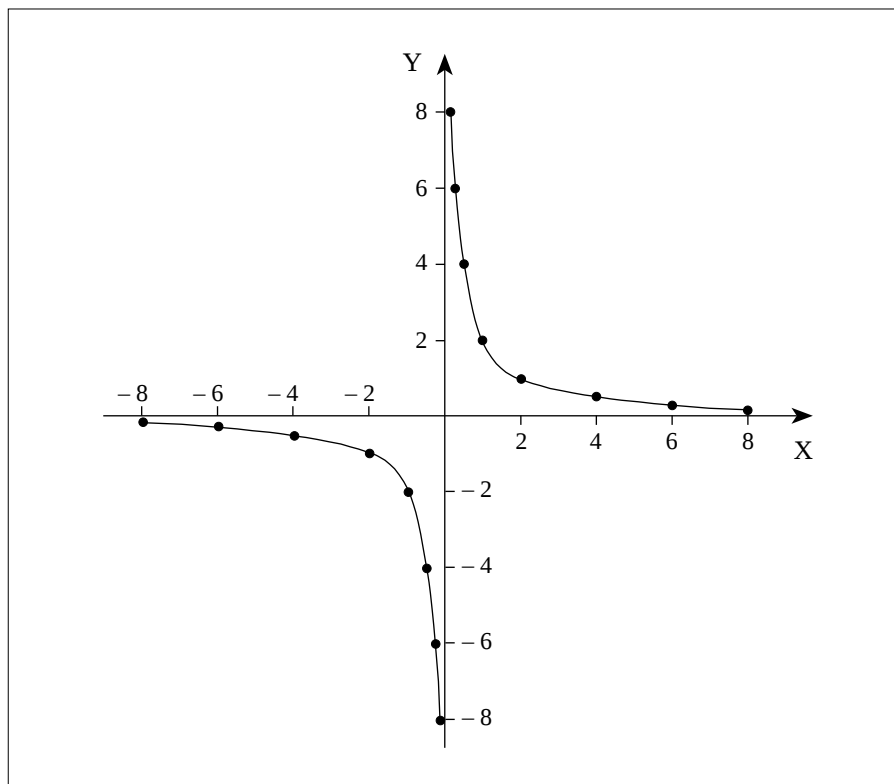


Fig. 16.5 Representación gráfica de la función $y = \frac{2}{x}$.

17.1 LA FUNCIÓN AFÍN

Una **función a fín** es aquella cuya representación gráfica es una línea recta. A la función afín también se le conoce como función lineal.

La función afín tiene la forma:

$$y = mx + b \quad (17.1)$$

donde $m, b \in \mathbb{R}$ y x tiene como exponente la unidad. Ejemplos de funciones afines son los siguientes

$$y = 3x + 2 \quad \begin{cases} m = 3 \\ b = 2 \end{cases} \quad y = -2x + \frac{1}{2} \quad \begin{cases} m = -2 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como la gráfica de una función afín es una línea recta y cualquier recta puede ser dibujada conocidos dos puntos de la misma, para dibujar la gráfica de una función afín basta con localizar dos puntos de la misma en el plano cartesiano.

■ EJEMPLO 17.1

Representa gráficamente las funciones:

a) $y = x + 2$

b) $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

Solución

a) Para la función $y = x + 2$, $m = 1$ y $b = 2$. Dando valores arbitrarios a x , obtenemos los valores de y :

x	y	$P(x, y)$
0	$0 + 2 = 2$	$P(0, 2)$
-2	$-2 + 2 = 0$	$P(-2, 0)$

Los dos puntos obtenidos permiten dibujar la línea recta tal como se muestra en la fig. 17.1.

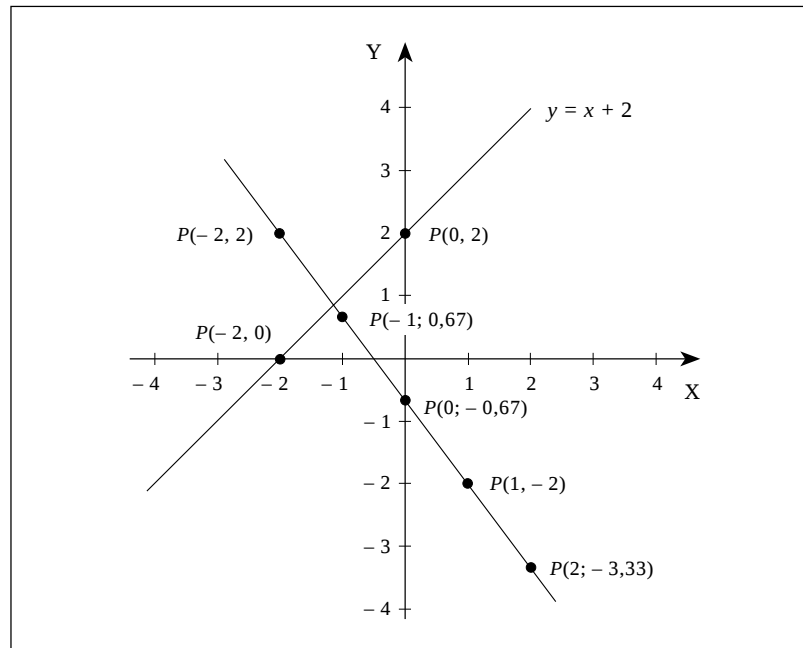


Fig. 17.1 Representación gráfica de las funciones del ejemplo 17.1.

b) Para esta función, $m = -\frac{4}{3}$ y $b = -\frac{2}{3}$. En este caso, tenemos que ser más cuidadosos en la selección de los valores de x , ya que los resultados para y pueden ser valores fraccionarios, difíciles de localizar en el plano cartesiano. A veces, con funciones como éstas, vale la pena asignar más de dos valores a x para escoger los de más fácil representación. De acuerdo a ello, podemos construir la siguiente tabla:

x	y	$P(x, y)$
-2	$y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$	$P(-2, 2)$
-1	$y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$P(-2; 0,67)$
0	$y = -\frac{2}{3}$	$P(0; -0,67)$
1	$y = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -2$	$P(1, -2)$
2	$y = -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$	$P(2; -3,33)$

Los cinco puntos anteriores han sido representados en la fig 17.1. Como puedes darte cuenta, representar los puntos cuyas coordenadas son números fraccionarios, tales como $P(0; -0,67)$, $P(-2; 0,67)$ y $P(2, -3,33)$ resulta más difícil que los puntos con coordenadas enteras tales como $P(1, -2)$ y $P(-2, 2)$. Sin duda que cualquier pareja de puntos basta para representar la función dada, sin embargo, los dos últimos son de más fácil representación.

17.2 PENDIENTE DE UNA RECTA

Considera la función:

$$y = mx - 1$$

donde m puede tomar cualquier valor real. Tomemos los valores $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$:

$$y = x - 1 \quad (m = 1) \quad y = 2x - 1 \quad (m = 2) \quad y = 3x - 1 \quad (m = 3)$$

Si estas tres funciones se dibujan en el plano real, se obtiene la fig. 17.2

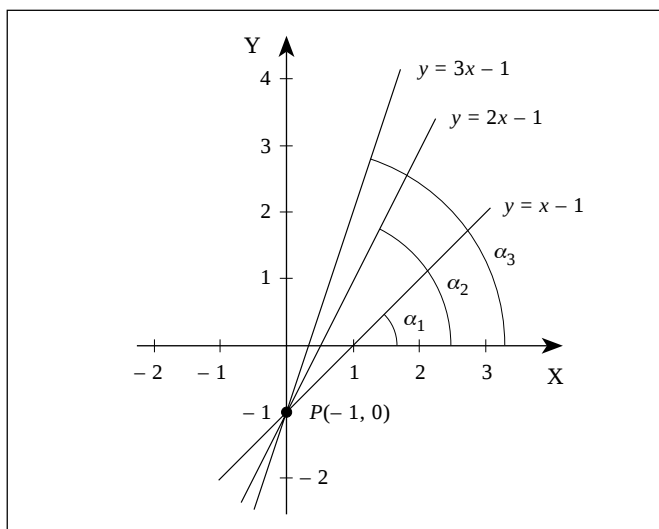


Fig. 17.2 Variación de la inclinación de la recta $y = mx - 1$ para valores de $m = 1, 2, 3$.

Como se puede observar de esa figura, a medida que m aumenta ($m = 1, 2, 3$), el ángulo ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) que forma la recta $y = mx - 1$ con el eje X, también aumenta. En general, se puede demostrar que:

El valor de m determina el ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje X.

A m se le conoce con el nombre de *pendiente de la recta*. El ángulo de inclinación, representativo del valor m , se mide en sentido antihorario a partir del eje de las abscisas. Es importante que observes en la fig. 17.2 que todas las rectas se cortan en el punto $x = 0, y = -1$. Este punto corresponde precisamente al término independiente de la relación (17.1). En forma general, podemos decir que en la expresión de la función afín:

$$y = mx + b$$

el término independiente, b , corresponde al punto donde la recta corta al eje Y. A fin de caracterizar a la relación $y = mx + b$, de acuerdo con la pendiente m , debemos considerar varios casos:

17.2.1 La pendiente m es positiva

Cuando la pendiente m es positiva, el ángulo formado por la recta y el eje X es un ángulo agudo.

En la fig. 17.3 se muestran las rectas:

$$y = 2x + 2 \quad (m = 2) \qquad y = x - 1 \quad (m = 1)$$

de pendientes positivas. Los ángulos correspondientes, α y β , son agudos (menores de 90°).

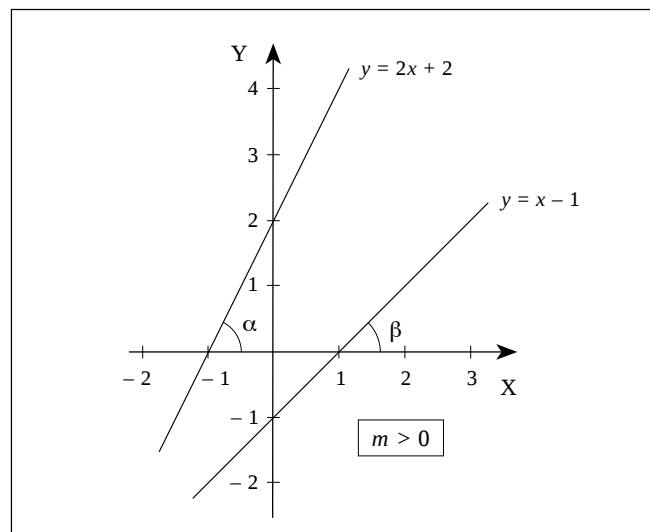


Fig. 17.3 Cuando la pendiente m es positiva, los ángulos que se forman con el eje X son agudos.

17.2.2 La pendiente m es negativa

Cuando la pendiente m es negativa, el ángulo formado por la recta y el eje X es un ángulo obtuso.

En la fig. 17.4 se muestran las rectas:

$$y = -3x + 6 \quad (m = -3) \qquad y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad \left(m = -\frac{2}{3}\right)$$

de pendientes negativas. Los ángulos correspondientes, α y β , son obtusos (mayores de 90°).

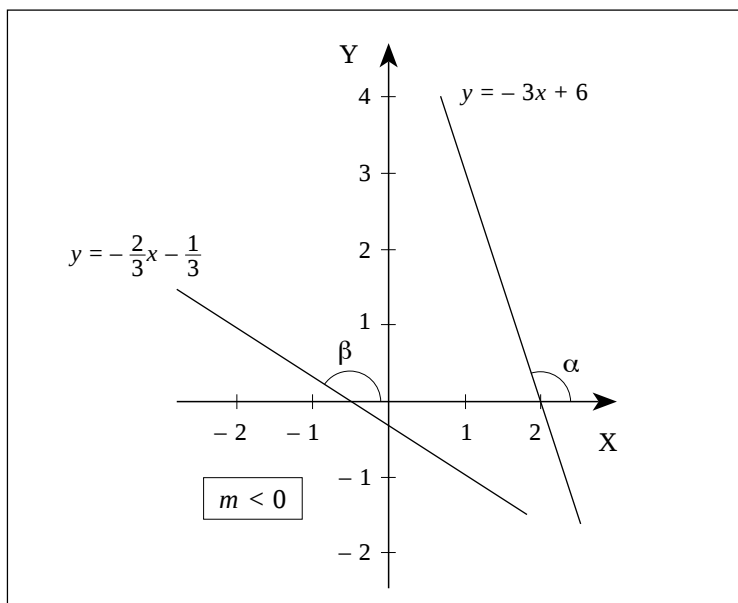


Fig. 17.4 Cuando la pendiente m es negativa, los ángulos que se forman con el eje X son obtusos.

17.2.3 La pendiente m es igual a cero

Cuando la pendiente m es igual a cero, la recta correspondiente es paralela al eje X. Si $m = 0$, la ecuación de la recta se convierte en:

$$y = mx + b \Rightarrow y = 0 \cdot x + b \Rightarrow y = b$$

Es decir, el valor $m = 0$ origina una línea recta paralela al eje X que corta al eje Y

en el punto $y = b$. Así, por ejemplo, las funciones:

$$y = 2 \qquad y = -1,5$$

pueden representarse como se muestra en la fig. 17.5.

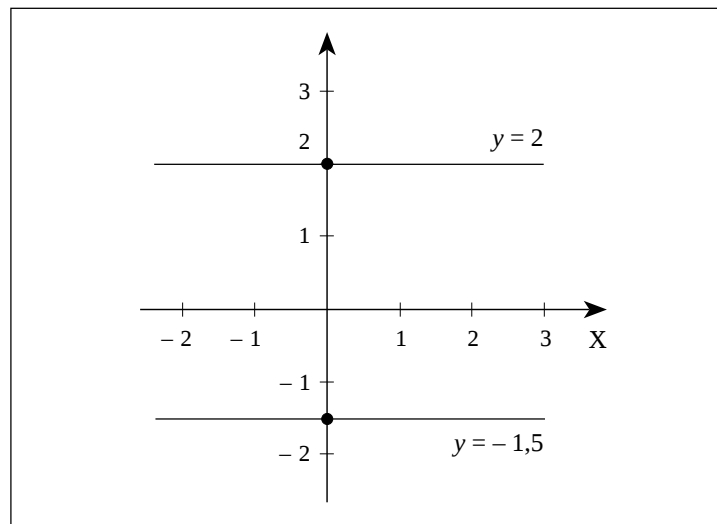


Fig. 17.5 Cuando $m = 0$, la función afín es una recta paralela al eje X. Representación de las rectas $y = 2$, $y = -1,5$.

17.2.4 La pendiente m es muy grande

Cuando la pendiente m es muy grande, el ángulo formado por la recta y el eje X se acerca a 90° .

En efecto, como puede verse de la fig. 17.6, el ángulo que forma una recta que pasa por el punto $P(1, 0)$ con el eje de las abscisas aumenta cuando m se incrementa. Se dice entonces que la pendiente m "tiende a infinito" y el ángulo "tiende a 90° ", lo que se representa como:

$$m \rightarrow \infty \qquad \alpha \rightarrow 90^\circ$$

En este caso, la representación gráfica obedece a la forma:

$$x = K$$

donde K es una constante real. Así, en la fig. 17.7 se representan las rectas dadas por $x = 2$ y $x = -1$. Como puede observarse de esta figura, todos los puntos de

la recta $x = 2$ tienen abscisa igual a 2, independientemente de los valores de la ordenada y . Similarmente, todos los puntos de la recta $x = -1$ tienen abscisa igual a -1 , independientemente de los valores de la ordenada y .

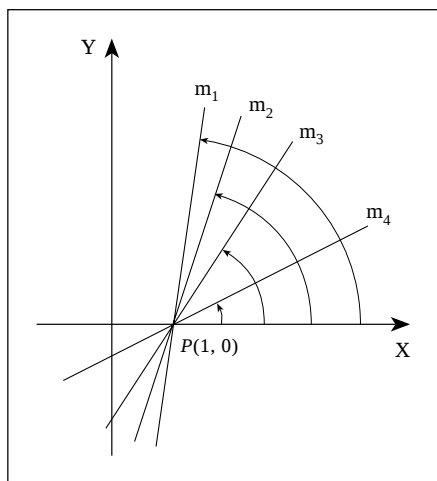


Fig. 17.6 A medida que la pendiente m aumenta, el ángulo que forma la recta con el eje X se aproxima a 90° .

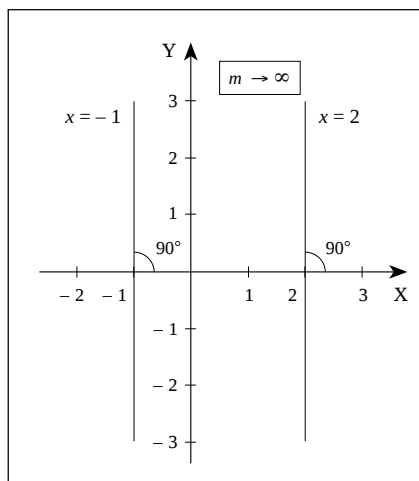


Fig. 17.7 Cuando m es muy grande, la recta obedece a la forma $x = K$. Se muestran las rectas correspondientes a $x = 2$ y $x = -1$.

◆ EJERCICIOS

17.1 Representa gráficamente las funciones:

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -2x - 1$

c) $y = -\frac{1}{5}x + 4$

d) $y = 3$

e) $y = -1$

f) $y = x + 1$

Especifica en cada caso el valor de m y el corte con el eje Y .

17.2 Determina qué ángulo (agudo, obtuso, 0° , 90°) forman las siguientes rectas con el eje de las abscisas:

a) $y = -5x + 3$

b) $y = \frac{3}{4}x + 1$

c) $y = 5$

d) $y = 2x - 4$

e) $y = -x + \frac{1}{3}$

f) $x = -0,75$

Especifica en cada caso el valor de m y el corte con el eje Y .

17.3 PUNTO PERTENECIENTE A UNA RECTA

Dada una recta, $y = mx + b$, ¿cómo podemos determinar si un punto cualquiera, $P_1(x_1, y_1)$, pertenece a la misma? Para determinarlo, basta sustituir las coordenadas de este punto en la función afín que representa dicha recta y verificar si la relación se convierte en una identidad. Esto es si:

$$y_1 = mx_1 + b$$

es una identidad, el punto $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la recta.

■ EJEMPLO 17.2

Determina si los puntos:

a) $P(0, 9)$

b) $P(-1, 3)$

c) $P\left(\frac{1}{5}, 8\right)$

pertenecen a la recta $y = -5x + 9$.

Solución

a) Sustituyendo $x = 0$, $y = 9$ en la ecuación dada:

$$9 \stackrel{?}{=} -5 \cdot (0) + 9 \Rightarrow 9 = 9$$

Como el resultado es una identidad, el punto $P(0, 9)$ pertenece a la recta.

b) Haciendo $x = -1$, $y = 3$:

$$3 \stackrel{?}{=} (-5) \cdot (-1) + 9 \Rightarrow 3 \stackrel{?}{=} 5 + 9 \Rightarrow 3 \neq 14$$

Como el resultado no es una identidad, el punto $P(-1, 3)$ no pertenece a la recta.

c) Con $x = \frac{1}{5}$, $y = 8$:

$$8 \stackrel{?}{=} (-5) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 9 \Rightarrow 8 \stackrel{?}{=} -1 + 9 \Rightarrow 8 = 8$$

Como el resultado es una identidad, el punto $P\left(\frac{1}{5}, 8\right)$ pertenece a la recta.

17.4 DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LA PENDIENTE m

Considera una recta cualquiera en el plano real, como se muestra en la fig. 17.8. Tal recta pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

La ecuación de la recta es:

$$y = mx + b$$

Como los puntos P_1 y P_2 pertenecen a la recta, pueden escribirse:

$$y_1 = mx_1 + b$$

$$y_2 = mx_2 + b$$

Restando las dos igualdades anteriores, se obtiene:

$$y_2 - y_1 = mx_2 + b - mx_1 - b$$

Cancelando b y sacando m como factor común:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Despejando m :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(17.2)

En palabras, podemos establecer:

Para determinar gráficamente la pendiente de una recta, se seleccionan dos puntos cualesquiera, P_1 y P_2 sobre la misma, se restan las ordenadas ($y_2 - y_1$) y las abscisas ($x_2 - x_1$) de dichos puntos. Al dividir estos resultados, según (17.2), se obtiene m .

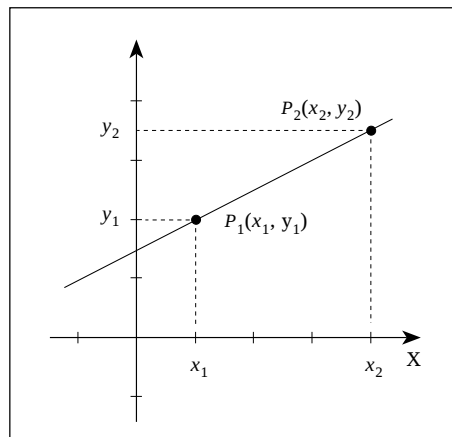


Fig. 17.8 Cálculo gráfico de la pendiente de una recta.

■ EJEMPLO 17.3

Dadas las rectas indicadas en la fig. 17.9, determina las pendientes correspondientes a las mismas mediante el uso de la relación (17.2).

Solución

a) Para la fig. 17.9(a) escogemos los puntos $P_1(0, 0)$ y $P_2(2, 2)$ de coordenadas $(0, 0)$ y $(2, 2)$. La pendiente, de esta recta, de acuerdo a la relación (17.2), puede calcularse de la forma siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} P_1(0, 0) \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0 \\ P_2(2, 2) \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 2 \end{array} \right\} m = \frac{2-0}{2-0} = 1 \Rightarrow m = 1$$

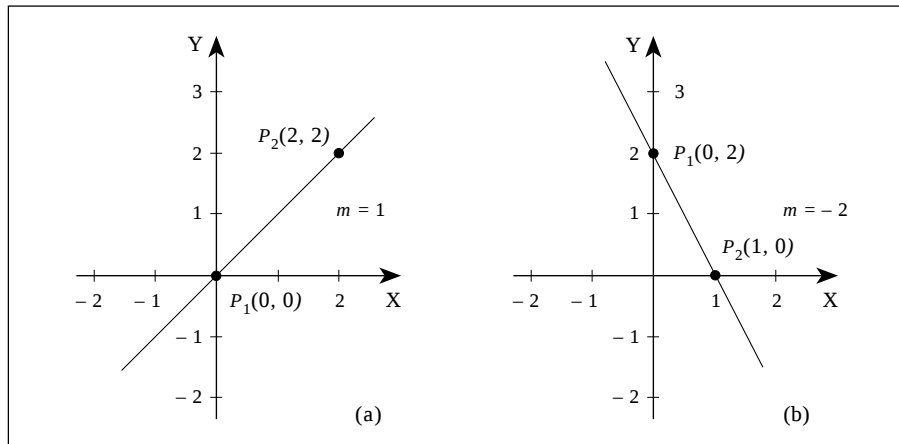


Fig. 17.9 Ejemplo 17.3.

b) Tomemos dos puntos dados por:

$$\left. \begin{array}{l} P_1(0, 2) \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 2 \\ P_2(1, 0) \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 0 \end{array} \right\} m = \frac{0-2}{1-0} = -2 \Rightarrow m = -2$$

◆ EJERCICIOS

17.3 Determina si los puntos:

a) $P(0, 4)$

b) $P(2, 1)$

c) $P(3, -11)$

pertenecen a la recta $y = -5x + 4$.

17.4 Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $(1, 4)$ y $(-3, -2)$

b) $(0, 0)$ y $(1, 5)$

c) $(-1, 0)$ y $(-3, 6)$

17.5 Dadas las rectas de la fig. 17.10, determina sus pendientes.

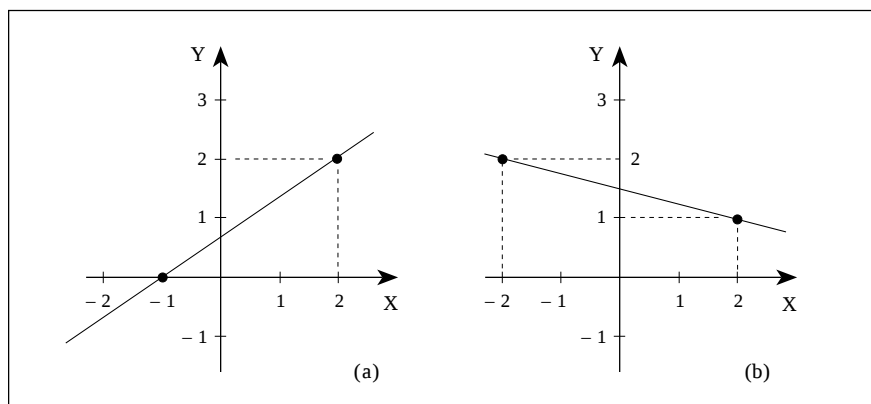


Fig. 17.10 Ejercicio 17.5.

17.5 ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Hasta ahora hemos trabajado con la función:

$$y = mx + b \quad (17.3)$$

Vimos también que la pendiente m puede expresarse como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (17.4)$$

Si llamamos:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

tendremos, de (17.4):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (17.5)$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta, relación (17.3):

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + b$$

MultiPLICANDO por Δx :

$$(\Delta x)y = (\Delta y)x + (\Delta x)b$$

Poniendo todos los términos en un solo miembro:

$$(\Delta y)x - (\Delta x)y + b(\Delta x) = 0$$

Si llamamos $A = \Delta y$, $B = -\Delta x$, $C = b\Delta x$, la relación anterior nos queda como:

$$Ax + By + C = 0 \quad (17.6)$$

A la relación anterior se le conoce con el nombre **ecuación general de la recta**. Como $A = \Delta y$ y $B = -\Delta x$, se tiene:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = -\frac{A}{B} \quad (17.7)$$

Es decir, en la ecuación general de la recta, *la pendiente de la misma se obtiene dividiendo el coeficiente de x por el coeficiente de y y cambiándole el signo al resultado*. Como:

$$C = b\Delta x = b(-B) = -bB \Rightarrow b = -\frac{C}{B} \quad (17.8)$$

relación que indica que *para hallar la intersección b con el eje Y , se divide el término independiente, C , por el coeficiente de y , B , y al resultado se le cambia de signo*.

■ EJEMPLO 17.4

Determina la función afín ($y = mx + b$) correspondiente a las siguientes ecuaciones generales:

a) $2x + 5y - 10 = 0$

b) $x - y + 4 = 0$

c) $-7x + 3y - 6 = 0$

Solución

a) Se tiene:

$$A = 2 \quad B = 5 \quad C = -10 \quad \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{5} \\ b = -\frac{C}{B} = -\frac{(-10)}{5} = 2 \end{array} \right.$$

Luego:

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

Observa que el mismo resultado pudo haberse hallado si toda la ecuación dada se hubiese dividido por el coeficiente de y , 5, y luego se hubiese despejado y :

$$\frac{2x}{5} + \frac{5y}{5} - \frac{10}{5} = 0 \Rightarrow \frac{2}{5}x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 2$$

b) La ecuación es $x - y + 4 = 0$, luego:

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1 \\ b = -\frac{C}{B} = -\frac{4}{-1} = 4 \end{array} \right.$$

Luego:

$$y = x + 4$$

c) Dividiendo por el coeficiente de y , 3:

$$-\frac{7x}{3} + \frac{3y}{3} - \frac{6}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{7}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}x + 2$$

■ EJEMPLO 17.5

Determina la pendiente y la intersección con el eje Y de las siguientes rectas:

a) $-x + 5y + 2 = 0$

b) $\frac{3}{4}x + 2y - \frac{7}{4} = 0$

Solución

a) $m = -\frac{A}{B} = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$

$b = -\frac{C}{B} = -\frac{2}{5}$

b) $m = -\frac{A}{B} = -\frac{\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$

$b = -\frac{C}{B} = -\frac{-\frac{7}{4}}{2} = \frac{7}{8}$

◆ EJERCICIOS

17.6 Determina la función afín correspondiente a la ecuación general dada por:

a) $3x - 4y + 6 = 0$

b) $\frac{3}{4}x + 2y - \frac{7}{4} = 0$

c) $\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

17.7 Determina la pendiente y la intersección con el eje Y de las siguientes rectas:

a) $10x - 4y + 1 = 0$

b) $2x - 5y = 0$

c) $\frac{1}{3}x + 6y - \frac{3}{2} = 0$

17.6 DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

En la fig. 17.11 se muestra una línea recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P(x, y)$. Este último es un punto cualquiera, variable, sobre la recta. Por definición, la pendiente m es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Despejando $y - y_1$:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (17.9)$$

La relación anterior permite determinar la ecuación de una recta, conocidos la pendiente y un punto perteneciente a la misma. La pendiente m también puede escribirse como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo en (17.9):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (17.10)$$

La expresión dada por (17.10) permite determinar la ecuación de una recta conocidos dos puntos cualesquiera de la misma.

■ EJEMPLO 17.6

Determina la ecuación general de la recta que: a) Tiene pendiente -1 y pasa por el punto $(0, 2)$. b) Tiene pendiente 2 y pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución

$$\text{a) } m = -1 \quad P_1(0, 2) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y - 2 = -x$$

De donde se obtiene:

$$x + y - 2 = 0$$

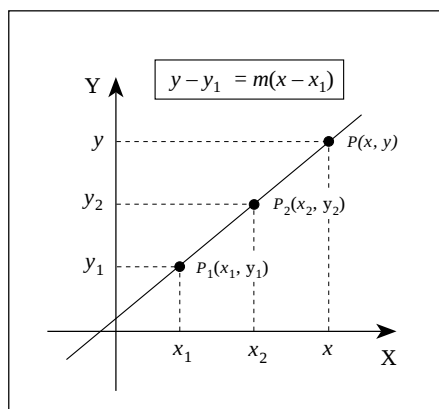


Fig. 17.11 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos cualesquiera.

Si sustituimos $x = 0, y = 2$ en la relación encontrada, obtenemos:

$$0 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

que comprueba que efectivamente el punto $P(0, 2)$ pertenece a la recta.

$$\text{b) } m = 2 \quad P_1(1, 1) \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 2x - 2$$

Finalmente, se puede escribir: $2x - y - 1 = 0$

Si hacemos $x = 1, y = 1$, obtenemos:

$$2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

que es una identidad. En la fig. 17.12 se muestran las rectas encontradas.

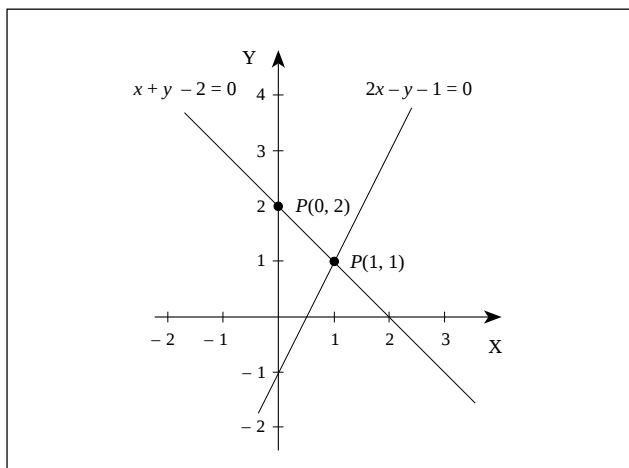


Fig. 17.12 Representación gráfica de las rectas $x + y - 2 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$ del ejemplo 17.6.

■ EJEMPLO 17.7

Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) $P_1(2, 3) \quad P_2(-2, -1)$

b) $P_1(0, 0) \quad P_2(1, -3)$

Dibuja, en los dos casos, la recta correspondiente.

Solución

En ambos casos usaremos la relación (17.10): $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$\text{a) } P_1(2, 3), P_2(-2, -1) \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y - 3 = \frac{-1-3}{-2-2}(x-2)$$

Resolviendo:

$$y - 3 = \frac{-4}{-4}(x - 2) \Rightarrow y - 3 = (x - 2) \Rightarrow y - 3 = x - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

$$\text{b) } P_1(0, 0), P_2(1, -3) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{-3-0}{1-0}(x-0)$$

Resolviendo: $y = -3x \Rightarrow 3x + y = 0$

En la fig. 17.13 se muestran las rectas correspondientes.

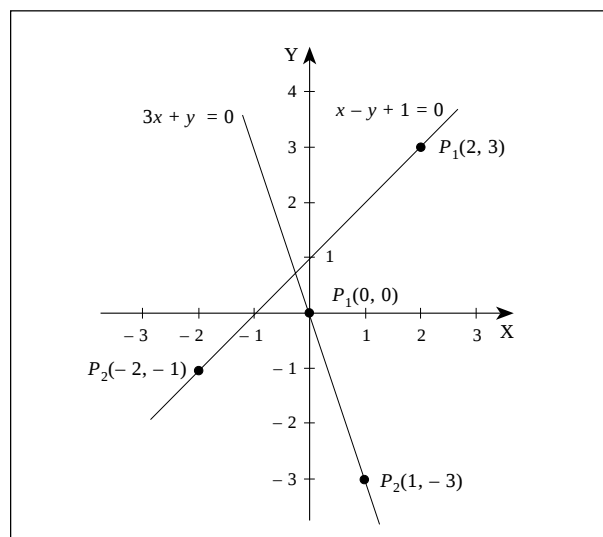


Fig. 17.13 Representación gráfica de las rectas $x - y + 1 = 0$ y $3x + y = 0$ del ejemplo 17.7.

◆ EJERCICIOS

17.8 Determina la ecuación general de la recta que: **a)** Tiene pendiente 3 y pasa por el punto $P(0, 0)$. **b)** Tiene pendiente $-1/3$ y pasa por el punto $P(1, 0)$. **c)** Tiene pendiente -1

y pasa por el punto $P(-1, -2)$. **d)** Tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $P(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$.
Dibuja en cada caso la recta resultante.

17.9 Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos y dibuja en cada caso la recta resultante:

a) $P_1(0, 1) \quad P_2(-1, 0)$

b) $P_1(-2, -3) \quad P_2(0, 3)$

c) $P_1(\frac{1}{2}, 3) \quad P_2(-3, 0)$

d) $P_1(0, 0) \quad P_2(-1, -2)$

17.7 POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Dadas dos rectas distintas, se pueden dar las siguientes posibilidades en cuanto a la posición de una con respecto a la otra:

- a. Las dos rectas son paralelas.
- b. Las dos rectas son secantes.

Dos rectas paralelas tienen sus pendientes iguales

Si las rectas están expresadas en la forma:

$$y = m_1x + b_1 \qquad y = m_2x + b_2$$

es necesario que $m_1 = m_2$ para que las dos rectas resulten paralelas. Si las rectas están expresadas en la forma general de la ecuación de la recta:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

es necesario que:

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} = m_2 = -\frac{A_2}{B_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad (17.11)$$

Es decir, si la relación (17.11) se cumple, las rectas no se cortan en ningún punto.

Dos rectas secantes tienen sus pendientes distintas.

De acuerdo a lo anterior, podemos escribir:

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$$

Dos rectas secantes se cortan en un punto común a ambas rectas. En la fig. 17.14 se muestran rectas paralelas y secantes. En el caso de las rectas secantes, un caso particular es aquél donde las dos rectas son perpendiculares. Para esta condición, se cumple:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Podemos entonces establecer:

Cuando dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es igual a -1 .

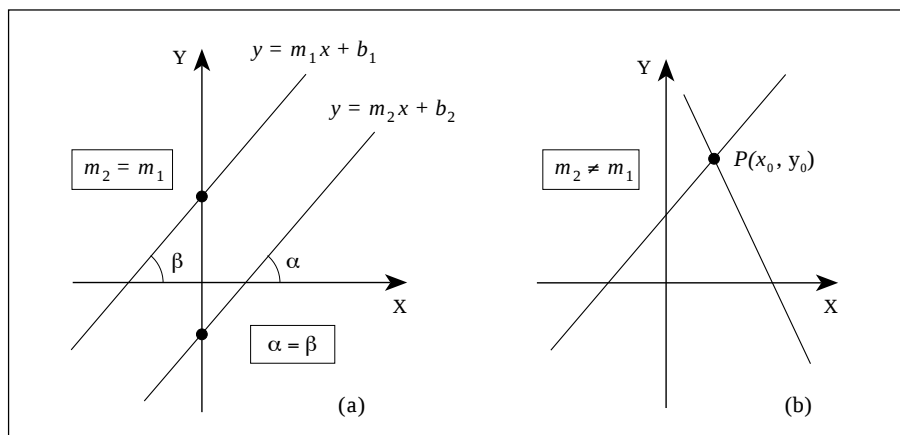


Fig. 17.14 (a) Rectas paralelas. (b) Rectas secantes.

■ EJEMPLO 17.8

Especifica si las siguientes rectas son paralelas o secantes:

a)
$$\begin{cases} 2x - 2y + 7 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y - 4 = 0 \end{cases}$$

Solución

a) La pendiente de la recta $2x - 2y + 7 = 0$ es: $m_1 = -\frac{2}{-2} = 1$

La pendiente de la recta $3x + y - 5 = 0$ es: $m_2 = -\frac{3}{1} = -3$

Como $m_1 \neq m_2$, las rectas son secantes.

b) La pendiente de la recta $x + 2y = 0$ es: $m_1 = -\frac{1}{2}$

La pendiente de la recta $3x + 6y - 4 = 0$ es: $m_2 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

Como $m_1 = m_2$, las rectas son paralelas.

◆ EJERCICIOS

17.10 Especifica si las siguientes rectas son paralelas o secantes:

a)
$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 6x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

Dibuja las rectas y en caso de ser secantes determina gráficamente el punto de intersección.

17.11 Determina si las rectas dadas son perpendiculares entre sí:

a)
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Dibuja en cada caso las rectas correspondientes.

18

SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

18.1 SISTEMA DE ECUACIONES. MÉTODO GRÁFICO DE SOLUCIÓN.

En el objetivo 17 estudiamos la ecuación:

$$Ax + By + C = 0$$

Si A y B no son iguales a cero simultáneamente, a la ecuación anterior se le denomina *ecuación general de la recta* o *ecuación lineal con dos incógnitas*. Las dos incógnitas corresponden a las variables x , y . Así, por ejemplo, las ecuaciones:

$$x + y - 4 = 0 \qquad 3x - 2y + 3 = 0$$

son ecuaciones lineales con dos incógnitas. Es usual pasar el término independiente al miembro derecho de la ecuación. Para las ecuaciones anteriores se tendrá:

$$x + y = 4 \qquad 3x - 2y = -3$$

La ecuación $x + y = 4$ tiene un número infinito de soluciones, ya que para cada valor de x puede encontrarse el valor correspondiente de y . En particular si:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \Rightarrow & y = 4: \text{ La solución es el punto } P(0, 4) \\ x = 1 & \Rightarrow & y = 3: \text{ La solución es el punto } P(1, 3) \\ x = -2 & \Rightarrow & y = 6: \text{ La solución es el punto } P(-2, 6) \end{array}$$

como puedes ver, podríamos seguir asignando valores a la variable x y obtener los respectivos valores de y . De la misma forma, la ecuación $3x - 2y = -3$ tiene infinitas soluciones.

Ahora bien, si se representan gráficamente las dos ecuaciones:

$$x + y = 4 \qquad 3x - 2y = -3$$

se obtiene la fig. 18.1. Como puedes notar, se trata de rectas secantes que se interceptan en el punto $P(1, 3)$. Este punto es entonces común a las dos rectas y

representa una solución para ambas. Es decir, cuando sustituimos $x = 1$, $y = 3$ en las dos ecuaciones anteriores, se obtiene una identidad:

$$\begin{aligned}x + y = 4 &\Rightarrow 1 + 3 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \\3x - 2y = -3 &\Rightarrow 3 - 6 = -3 \Rightarrow -3 = -3\end{aligned}$$

El conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas descrito constituye un *sistema de ecuaciones lineales simultáneas* de dos incógnitas. Al punto de intersección de las rectas que representan a dichas ecuaciones, se le conoce como *solución del sistema*. Es decir, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales es encontrar una solución que satisfaga a ambas ecuaciones. En general, puede hablarse de un sistema de ecuaciones con n incógnitas, donde n es cualquier número natural mayor o igual a 2.

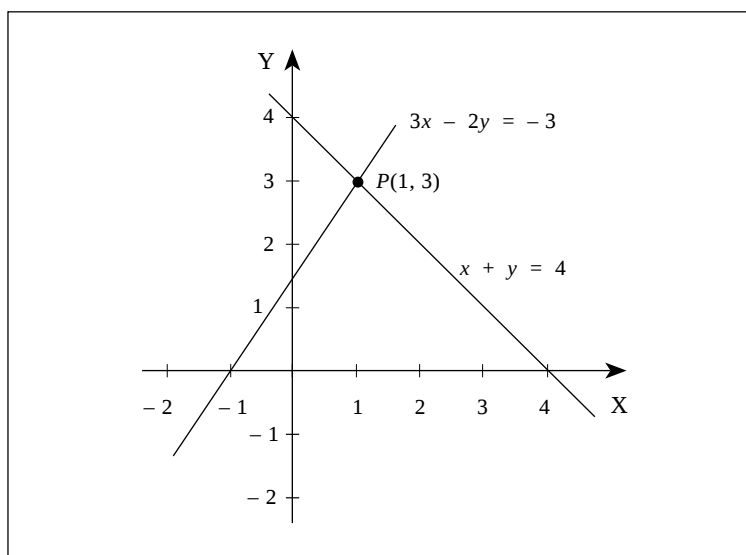


Fig. 18.1 Las rectas de la figura se interceptan en el punto $P(1, 3)$.

Es usual representar a los sistemas de ecuaciones de la manera siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

donde el signo de llaves indica que se trata de un sistema de ecuaciones.

En realidad, el término sistema de ecuaciones no se circunscribe a ecuaciones lineales. Como ejemplo considera el sistema formado por:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Si se dan valores a x , se obtienen los valores respectivos de y para las dos ecuaciones del sistema:

$$y = x^2 \begin{cases} x = 0 & y = 0: & P(0, 0) \\ x = 1 & y = 1: & P(1, 1) \\ x = -1 & y = 1: & P(-1, 1) \\ x = 2 & y = 4: & P(2, 4) \\ x = -2 & y = 4: & P(-2, 4) \\ x = 3 & y = 9: & P(3, 9) \\ x = -3 & y = 9: & P(-3, 9) \end{cases} \quad x + y = 6 \begin{cases} x = 0 & y = 6: & P(0, 6) \\ x = 1 & y = 5: & P(1, 5) \end{cases}$$

Si se dibujan las dos ecuaciones del sistema usando los puntos determinados, se obtiene la gráfica de la fig. 18.2. Como puede verse, la recta y la parábola se interceptan en dos puntos, $P_1(2, 4)$ y $P_2(-3, 9)$. Es decir, el sistema de ecuaciones tiene dos soluciones, contrario a lo que sucede cuando se trata de dos líneas rectas, donde la solución es única.

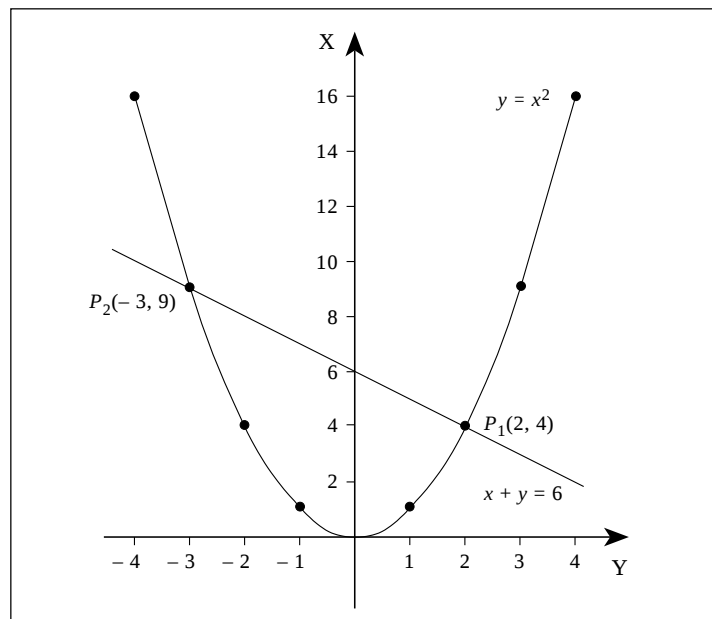


Fig. 18.2 La solución del sistema formado por la parábola $y = x^2$ y la recta $x + y = 6$ está representada por los puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(-3, 9)$, donde se interceptan la curva y la recta.

Para comprobar que los puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(-3, 9)$ son soluciones del sistema, las sustituimos en ambas ecuaciones:

$$y = x^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1: 4 = (2)^2 \Rightarrow 4 = 4 \\ P_2: 9 = (-3)^2 \Rightarrow 9 = 9 \end{array} \right.$$

$$x + y = 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1: 2 + 4 = 6 \Rightarrow 6 = 6 \\ P_2: -3 + 9 = 6 \Rightarrow 6 = 6 \end{array} \right.$$

◆ EJERCICIOS

18.1 Determina gráficamente la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 3y = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} y = 3x \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

18.2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} y = -x^2 \\ 3x - y = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 2x \end{cases}$$

18.2 SISTEMAS DE ECUACIONES COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

*Un sistema de ecuaciones se dice que es **compatible** cuando tiene una solución única.*

Gráficamente un sistema compatible de ecuaciones se reconoce porque las rectas que representan a las ecuaciones se cortan en un solo punto. Las ecuaciones que forman un sistema compatible se dice que son linealmente independientes.

Como las rectas que representan a un sistema compatible se cortan en un punto, sus pendientes tienen que ser distintas ($m_1 \neq m_2$). Así, el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - 3y = -12 \end{cases}$$

es un sistema compatible porque:

$$\begin{array}{ll} \text{Pendiente de } 2x - y = 6: & m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2 \\ \text{Pendiente de } x - 3y = -12: & m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m_1 \neq m_2$$

*Un sistema de ecuaciones se dice que es **incompatible** si las ecuaciones que lo integran no tienen solución común.*

Gráficamente un sistema incompatible de ecuaciones se reconoce porque las rectas que representan a las ecuaciones no se cortan en ningún punto y son, por tanto, paralelas. Como las rectas que representan a un sistema incompatible no se cortan en punto alguno, las pendientes de las mismas deben ser iguales. Así, el sistema:

$$\begin{cases} x - 5y = 18 \\ 2x - 10y = 10 \end{cases}$$

es un sistema incompatible porque:

$$\begin{array}{ll} \text{Pendiente de } 2x - 10y = 10: & m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{-5} = \frac{1}{5} \\ \text{Pendiente de } x - 5y = 18: & m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-10} = \frac{1}{5} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m_1 = m_2$$

*Un sistema de ecuaciones se dice que es **compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones.*

Gráficamente, las ecuaciones que integran un sistema compatible indeterminado

coinciden. A dichas ecuaciones se les conoce como equivalentes y una de ellas puede ser obtenida por manipulación de los coeficientes de las variables de la otra. Así, las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 6x - 10y = 8 \end{cases}$$

constituyen un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, ya que la segunda ecuación puede obtenerse multiplicando la primera por 2.

■ EJEMPLO 18.1

Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles o incompatibles. Dibuja las rectas correspondientes y encuentra gráficamente la solución del sistema cuando sea posible.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$$

Solución

$$\text{a) La pendiente de la recta } 2x - 3y = -1 \text{ es: } m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{La pendiente de la recta } 4x - 6y = 12 \text{ es: } m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{-6} = \frac{2}{3}$$

Como $m_1 = m_2$, las rectas son paralelas y el sistema es incompatible.

$$\text{b) La pendiente de la recta } 2x + 3y = 0 \text{ es: } m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{La pendiente de la recta } 5x - 2y = 19 \text{ es: } m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Como $m_1 \neq m_2$, las rectas se cortan y el sistema es compatible.

En la fig. 18.3 se muestra la representación gráfica de los dos sistemas de ecuaciones. Observa que en el caso del sistema incompatible (fig. 18.3a) las dos rectas son paralelas entre sí, ya que tienen la misma pendiente. Para el sistema compatible (fig. 18.3b) las rectas tienen pendientes distintas y, por tanto se cortan en un punto que para este caso es $P(3, -2)$.

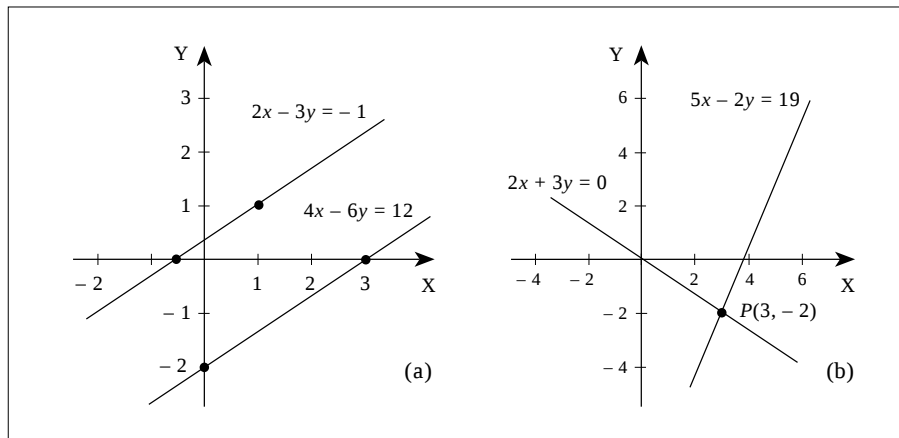


Fig. 18.3 Ejemplo 18.1: (a) Sistema incompatible. (b) Sistema compatible.

◆ EJERCICIOS 18.3

Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles o incompatibles. Dibuja las rectas correspondientes y encuentra la solución del sistema cuando sea posible.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 6x + 2y = -4 \end{cases}$ |
| d) $\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ x + 1 = y \end{cases}$ | e) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x = -1 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} y = 2 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ | h) $\begin{cases} 1/5 x + 4 = y \\ x + 5y = 0 \end{cases}$ | i) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$ |

El método gráfico usado para resolver un sistema de ecuaciones, aunque muy ilustrativo, consume una cantidad apreciable de tiempo y está sujeto a errores de lectura por parte del estudiante. Si las coordenadas del punto de intersección de las rectas no son números enteros, se debe hacer un estimado de los valores señalados en el plano $X - Y$.

Una respuesta más exacta en la solución de sistemas de ecuaciones se obtiene utilizando los métodos analíticos que describimos a continuación.

18.3 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN PARA LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 7 & \textcircled{1} \\ x - y = 1 & \neq \end{cases}$$

El método de sustitución comprende los siguientes pasos:

1. Despeje de una de las incógnitas, digamos y , en la primera ecuación:

$$y = 7 - x$$

2. Sustitución de la incógnita y en la segunda ecuación:

$$x - (7 - x) = 1$$

3. Resolución de la ecuación resultante para obtener x :

$$x - (7 - x) = 1 \Rightarrow x - 7 + x = 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

4. Sustitución del valor encontrado, $x = 4$, en cualquiera de las ecuaciones del sistema para obtener el valor de y . Si hacemos la sustitución en $\textcircled{1}$:

$$x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x \Rightarrow y = 7 - 4 \Rightarrow y = 3$$

Luego, la solución del sistema es el punto $P(4, 3)$.

Un paso importante en la confirmación de la solución encontrada es la verificación de que realmente es una solución. Para ello, es conveniente sustituir las coordenadas encontradas en las dos ecuaciones del sistema:

$$x + y = 7 \Rightarrow 4 + 3 = 7 \Rightarrow 7 = 7$$

$$x - y = 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

Como los valores calculados convierten a las ecuaciones en identidades, la solución hallada es correcta.

■ EJEMPLO 18.2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de sustitución:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ -7x - 4y = 2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 12 \end{cases} \end{array}$$

Solución

a) Despejando y en la primera ecuación:

$$y = 1 - 2x$$

Sustituyendo y en la segunda ecuación:

$$5x + 3(1 - 2x) = 1$$

Efectuando operaciones:

$$5x + 3 - 6x = 1 \Rightarrow -x = 1 - 3 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$$

Determinación del valor de y :

$$y = 1 - 2x \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 \Rightarrow y = -3$$

Luego, la solución del sistema es el punto $P(2, -3)$.

Comprobación:

$$2x + y = 1 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$5x + 3y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1 \Rightarrow 10 - 9 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

b) Despejando x en la primera ecuación: $x = \frac{9 - 5y}{3}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $-7\left(\frac{9 - 5y}{3}\right) - 4y = 2$

Efectuando operaciones:

$$-7(9 - 5y) - 12y = 6 \Rightarrow -63 + 35y - 12y = 6 \Rightarrow 23y = 69 \Rightarrow y = 3$$

Determinación del valor de x :

$$x = \frac{9 - 5y}{3} = \frac{9 - 5 \cdot 3}{3} = \frac{9 - 15}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

Comprobación:

$$3x + 5y = 9 \Rightarrow 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (3) = 9 \Rightarrow -6 + 15 = 9 \Rightarrow 9 = 9$$

$$-7x - 4y = 2 \Rightarrow (-7) \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = 2 \Rightarrow 14 - 12 = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

c) Despejando x en la primera ecuación: $x = 10 + 5y$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2(10 + 5y) - 10y = 12$

Efectuando operaciones:

$$20 + 10y - 10y = 12 \Rightarrow 20 = 12$$

Evidentemente, hemos llegado a un absurdo. Esto es evidencia de que el sistema es incompatible. Este resultado pudo haberse previsto si observamos que las ecuaciones del sistema tienen igual pendiente:

$$\text{Pendiente de } x - 5y = 10: \quad m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Pendiente de } 2x - 10y = 12: \quad m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-10} = \frac{1}{5}$$

■ EJEMPLO 18.3

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{8x}{5} + 2y = 0 \\ x + \frac{y}{2} = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{4}{3} \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Solución

a) Para resolver el sistema, primero eliminamos los denominadores:

$$\begin{cases} 8x + 10y = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $x = -\frac{5y}{4}$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$2\left(-\frac{5y}{4}\right) + y = 6 \Rightarrow -10y + 4y = 24 \Rightarrow -6y = 24 \Rightarrow y = -4$$

Luego:

$$x = -\frac{5 \cdot (-4)}{4} = 5 \Rightarrow x = 5$$

b) Eliminando denominadores de la primera relación:

$$3(x + y) = 4(x - y) \Rightarrow 3x + 3y = 4x - 4y \Rightarrow x - 7y = 0$$

Luego, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x - 7y = 0 & \textcircled{1} \\ 2x + y = 6 & \neq \end{cases}$$

De $\textcircled{1}$: $x = 7y$

Sustituyendo en $\neq$:

$$2 \cdot (7y) + y = 6 \Rightarrow 14y + y = 6$$

Luego,

$$15y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{15} \Rightarrow y = \frac{2}{5}$$

De $\textcircled{1}$:

$$x = 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

Comprobación:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{14}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{14}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{16}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2x + y = 6 \Rightarrow 2 \cdot \frac{14}{5} + \frac{2}{5} = 6 \Rightarrow \frac{28}{5} + \frac{2}{5} = 6 \Rightarrow \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow 6 = 6$$

◆ EJERCICIOS

18.4 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de sustitución:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x = -4 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 5a - 3b = 6 \\ 3a - b = 4 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 6x - 5y = -2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} 4m - 5n = 8 \\ 6m - 3n = 2 \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

18.5 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{y-2}{3} = 5 \\ \frac{x-5}{5} - \frac{y+3}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2x-1}{4} - \frac{5-2y}{3} = 0 \\ \frac{7-2x}{6} + \frac{2y+5}{9} = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y - \frac{4y+1}{3} = \frac{2x-5}{2} \\ x - \frac{3x-1}{7} = \frac{y+5}{6} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + \frac{y}{3} - 4(x+y) = 10 \\ 7(x-1) + \frac{3}{2}(x+5) = 6 \end{cases}$$

18.4 MÉTODO DE IGUALACIÓN

En este método se despeja la misma variable, x o y , en las dos ecuaciones y se igualan esos resultados. Los ejemplos que siguen ilustran el método.

■ EJEMPLO 18.4

Utiliza el método de igualación para resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 2/3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Solución

a) Despejando y en ambas ecuaciones:

$$3x - y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 5 \quad \text{①}$$

$$2x - y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1 \quad \neq$$

Igualando los dos resultados anteriores:

$$3x - 5 = 2x - 1$$

Resolviendo la ecuación:

$$3x - 2x = -1 + 5 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

El valor de y se obtiene de la ecuación ① o $\neq$. Sustituyendo en ① :

$$y = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 7$$

b) Despejando x en ambas ecuaciones:

$$x - y = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = y + \frac{2}{3} \quad \textcircled{1}$$

$$2x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 - y}{2} \quad \textcircled{2}$$

Igualando el valor de x :

$$y + \frac{2}{3} = \frac{4 - y}{2}$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{3y + 2}{3} = \frac{4 - y}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(3y + 2) = 3(4 - y) \quad \Rightarrow \quad 6y + 4 = 12 - 3y$$

$$6y + 3y = 12 - 4 \quad \Rightarrow \quad 9y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{9}$$

Sustituyendo en $\textcircled{1}$:

$$x = y + \frac{2}{3} = \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8 + 6}{9} = \frac{14}{9} \quad x = \frac{14}{9}$$

◆ EJERCICIOS 18.6

Utiliza el método de igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y = 26 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{x + y}{3} = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = -3 \\ \frac{x - y}{2} + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 7x + 13 = -2y \\ 3y + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{1}{x} = 2 \\ x + y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} y = 7 \\ x - y = 10 \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} 4x - y = 12 \\ 2y - 8x = 5 \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} 3m + n = -1 \\ 3m - n = 4 \end{cases}$$

18.5 MÉTODO DE REDUCCIÓN O DE ELIMINACIÓN

Este es el método más seguro para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en eliminar una de las variables combinando en forma

apropiada las ecuaciones. En particular, cuando la incógnita a eliminar tiene igual coeficiente en ambas ecuaciones, basta con sumar o restar las ecuaciones. A manera de ejemplo, considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones para eliminar la incógnita y :

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -7 \end{cases} \\ \hline 2x + 0 = -4 & \Rightarrow & 2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \end{array}$$

Una vez obtenido el valor de x , sustituimos en cualquiera de las ecuaciones originales para determinar el valor de y . Si usamos la primera ecuación:

$$y = 3 - x \quad \Rightarrow \quad y = 3 - (-2) = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5$$

Es importante en este método arreglar los términos de las ecuaciones dadas de manera que las incógnitas x, y , queden alineadas, una debajo de la otra, al efectuar la suma o resta que se requiera.

■ EJEMPLO 18.5

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x + y = 12 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - y = -5 \\ y - 5x = 9 \end{cases} \end{array}$$

Solución

a) Restando ambas ecuaciones para eliminar y :

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \\ \hline x - 2x - y - (-y) = 4 - 7 & \Rightarrow & x - 2x - y + y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \end{array}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x - y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = x - 4 = 3 - 4 = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

b) Restando ambas ecuaciones para eliminar x :

$$\begin{cases} 5x + y = 12 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$(5x - 5x) + y - (-2y) = 12 - 10 \Rightarrow y + 2y = 2 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x = \frac{12 - y}{5} = \frac{12 - \frac{2}{3}}{5} = \frac{36 - 2}{15} = \frac{34}{15} \Rightarrow x = \frac{34}{15}$$

c) Arreglando ambas ecuaciones y sumando para eliminar y :

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ -5x + y = 9 \end{cases}$$

$$3x - 5x - y + y = -5 + 9 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$y - 5x = 9 \Rightarrow y = 9 + 5x = 9 + 5 \cdot (-2) = 9 - 10 = -1 \Rightarrow y = -1$$

Cuando la incógnita a eliminar no tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, el procedimiento común consiste en efectuar las multiplicaciones apropiadas para hacer que dicho coeficiente sea el mismo y posteriormente se procede a sumar o restar las ecuaciones según convenga.

■ EJEMPLO 18.6

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5x - 6y = -8 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -x + 3y = -1 \\ 5x - 10y = 15 \end{cases} \end{array}$$

Solución

a) Para igualar los coeficientes de la incógnita y , multiplicamos la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 5x - 6y = -8 \\ 3(4x + 2y) = 3 \cdot 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 6y = -8 \\ 12x + 6y = 42 \end{cases}$$

{

Sumemos ahora las dos ecuaciones resultantes para eliminar la incógnita y :

$$\begin{cases} 5x - 6y = -8 \\ 12x + 6y = 42 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{17x = 34}{17} \Rightarrow x = \frac{34}{17} \Rightarrow x = 2$$

De la primera ecuación:

$$y = \frac{5x + 8}{6} = \frac{5 \cdot 2 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow y = 3$$

b) Para igualar los coeficientes de la incógnita y , multiplicamos la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} 2(5x - y) = 2 \cdot 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

Sumemos ahora las dos ecuaciones resultantes para eliminar la incógnita y :

$$\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{13x = 13}{13} \Rightarrow x = \frac{13}{13} \Rightarrow x = 1$$

De la primera ecuación:

$$y = 5x - 1 = 5 \cdot 1 - 1 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow y = 4$$

c) Para igualar los coeficientes de la incógnita x , multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$\begin{cases} 5(-x + 3y) = 5 \cdot (-1) \\ 5x - 10y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 15y = -5 \\ 5x - 10y = 15 \end{cases}$$

Sumemos ahora las dos ecuaciones resultantes para eliminar la incógnita x :

$$\begin{cases} -5x + 15y = -5 \\ 5x - 10y = 15 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{5y = 10}{5} \Rightarrow y = \frac{10}{5} \Rightarrow y = 2$$

Despejando x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{15 + 10y}{5} = \frac{15 + 10 \cdot 2}{5} = \frac{35}{5} = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

■ EJEMPLO 18.7

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} 5a + 3b = 10 \\ 4a + 5b = 12 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{2x + 3y}{x - 5y} = -\frac{1}{2} \\ 7x + 2y = 3 \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y = \frac{19}{15} \\ -2x + 4y = -\frac{8}{3} \end{cases} \end{array}$$

Solución

a) A fin de eliminar la incógnita a , multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda ecuación por 5. Esto permite igualar los coeficientes de a :

$$\begin{cases} 4(5a + 3b) = 4 \cdot 10 \\ 5(4a + 5b) = 5 \cdot 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 20a + 12b = 40 \\ 20a + 25b = 60 \end{cases}$$

Si restamos las dos ecuaciones para eliminar la incógnita a :

$$\begin{cases} 20a + 12b = 40 \\ 20a + 25b = 60 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 20a + 12b = 40 \\ \underline{20a + 25b = 60} \\ 12b - 25b = 40 - 60 \end{array} \Rightarrow -13b = -20 \Rightarrow b = \frac{20}{13}$$

Despejando a en la primera ecuación:

$$a = \frac{10 - 3b}{5} = \frac{10 - 3 \cdot \frac{20}{13}}{5} = \frac{10 - \frac{60}{13}}{5} = \frac{\frac{130 - 60}{13}}{5} = \frac{70}{5 \cdot 13} = \frac{14}{13} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{14}{13}$$

b) Inicialmente se efectúan operaciones para simplificar la primera ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{2x + 3y}{x - 5y} &= -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(2x + 3y) = -(x - 5y) \quad \Rightarrow \quad 4x + 6y = -x + 5y \\ 4x + x + 6y - 5y &= 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + y = 0 \end{aligned}$$

Luego, el sistema puede escribirse como:

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 0 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$10x - 7x = 0 - 3 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{3} \Rightarrow x = -1$$

Despejando y de la primera ecuación:

$$y = -5 \cdot x = -5 \cdot (-1) = 5 \Rightarrow y = 5$$

c) Eliminando denominadores en las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{1ra ecuación:} & \frac{10x - 3y}{15} = \frac{19}{15} & \Rightarrow 10x - 3y = 19 \\ \text{2da ecuación:} & -6x + 12y = -8 & \Rightarrow 6x - 12y = 8 \end{array}$$

El sistema de ecuaciones a resolver es entonces:

$$\begin{cases} 10x - 3y = 19 \\ 6x - 12y = 8 \end{cases}$$

O, dividiendo la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 10x - 3y = 19 \\ 3x - 6y = 4 \end{cases}$$

Si decidimos eliminar la incógnita x , debemos multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 10:

$$\begin{cases} 3(10x - 3y) = 3 \cdot 19 \\ 10(3x - 6y) = 4 \cdot 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x - 9y = 57 \\ 30x - 60y = 40 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 30x - 9y = 57 \\ 30x - 60y = 40 \end{cases}$$

$$-9y - (-60y) = 57 - 40 \Rightarrow -9y + 60y = 17 \Rightarrow 51y = 17 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Despejando x en la segunda ecuación:

$$x = \frac{4 + 6y}{3} = \frac{4 + 6 \cdot \frac{1}{3}}{3} = \frac{4 + 2}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

◆ EJERCICIOS

18.7 Usa el método de reducción para resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 5x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 7y = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + y = 18 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -3m + n = -2 \\ 3m - 2n = 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x - 5y = \frac{3}{4} \\ 6x + y = 8 \end{cases}$$

18.8 Usa el método de reducción para resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 5y = 18 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 7x - 5y = 22 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 8x + 9y = 11 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 6x - 3y = 24 \end{cases}$$

18.9 Resuelve, mediante el método de reducción, las ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x - \frac{1}{3}y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} - 3 = 0 \\ \frac{5x-3y}{4} + 1 = 0 \end{cases}$$

18.6 PROBLEMAS QUE REQUIEREN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

La Matemática del mundo cotidiano normalmente aparece escondida en el lenguaje común y corriente. Cuando se trata de traducir ese lenguaje al de la Matemática, hay que usar cierto nivel de abstracción.

Es necesario entonces pensar en términos de incógnitas y de igualdades que relacionen lo que se plantea teóricamente. En este aspecto, muchas palabras claves son útiles para construir las ecuaciones apropiadas. La tabla que a continuación aparece, muestra algunas palabras claves y su expresión matemática.

Palabras claves	Traducción matemática	Ejemplo
Es... Es igual a... El resultado es...	$=$	$x = y$
Excede en... La suma de... Incrementado en... Más... Más que... Se le agrega...	$+$	$x + y$
La diferencia entre... Disminuido en... Se le quitan... x sustraído de y ...	$-$	$x - y$
El producto de... Multiplicado por...	$\cdot$	$x \cdot y$
El cociente de... Dividido por...	$\div$	$\frac{x}{y}$

Ciertas relaciones entre números también pueden expresarse en lenguaje matemático tal como lo indica la siguiente tabla:

Cantidad desconocida	x
El doble de...	$2x$
El triple de...	$3x$
Número par	$2x$
Número impar	$2x + 1$
Números consecutivos	$x, x + 1, x + 2$
Números pares consecutivos	$2x, 2x + 2, 2x + 4$
Números impares consecutivos	$2x + 1, 2x + 3, 2x + 5$

Como ejemplo de aplicación de las tablas anteriores tenemos:

Un número incrementado en 5:	$x + 5$
Un número dividido por 6:	$x/6$
La mitad de un número:	$x/2$
La suma de 7 y un número desconocido:	$7 + x$
Un número multiplicado por 8:	$8x$
10 más el triplo de un número:	$10 + 3x$
4 veces la edad de una persona:	$4x$ (x : edad)
La suma de un número y su mitad:	$x + x/2$
La suma de dos números:	$x + y$

■ EJERCICIO 18.10

Expresa matemáticamente las siguientes frases:

- a) 4 veces la edad de Luis es igual a 36.
- b) 18 incrementado en cierta cantidad.
- c) Un número menos 10.
- d) El costo de un vehículo menos la tercera parte del costo.
- e) El doble de un número dividido por 5.
- f) La suma de 2 números consecutivos.
- g) El triplo de un número menos su mitad.
- h) Cuatro veces más que un número.
- i) La suma de x y la mitad de y .
- j) La edad de Omar es el doble de la de Frank.

Muchos problemas prácticos conducen al planteamiento de sistemas de ecuaciones. Una vez que se logra "traducir" el "lenguaje común" al "lenguaje matemático", dichos problemas se resuelven encontrando la solución del sistema de ecuaciones resultante.

Los ejemplos que siguen muestran las estrategias a desarrollar en algunos casos notables. La muestra no es exhaustiva y sólo pretende señalar algunos caminos para que desarrolles tu propia formulación en el tratamiento de casos específicos.

■ EJEMPLO 18.8

La suma de dos números es 95 y su diferencia es 21. Determina los números.

Solución

x : Uno de los números

y : El otro número

La suma de dos números es 95: $x + y = 95$

Su diferencia es 21: $x - y = 21$

La solución del problema se obtiene encontrando los valores de x y y . Sumando las dos ecuaciones del sistema para eliminar y :

$$\begin{cases} x + y = 95 \\ x - y = 21 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \hline 2x = 116 \end{array} \Rightarrow x = \frac{116}{2} = 58 \Rightarrow x = 58$$

De la primera ecuación:

$$y = 95 - x = 95 - 58 = 37 \Rightarrow y = 37$$

Luego:

1er. número: 58

2do. número: 37

■ EJEMPLO 18.9

La suma de dos números es 38 y el mayor excede en 5 al doble del menor. Determina los números.

Solución

x : Número mayor

y : Número menor

La suma de dos números es 38: $x + y = 38$

El mayor excede en 5 al doble del menor: $x = 2y + 5$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \hline y + 2y = 33 \end{array} \Rightarrow 3y = 33 \Rightarrow y = \frac{33}{3} = 11 \Rightarrow y = 11$$

De la primera ecuación:

$$x = 38 - y = 38 - 11 \Rightarrow x = 27$$

Comprobación:

La suma de los números: $27 + 11 = 38$

El número mayor, 27, es efectivamente igual al doble del menor (22) más 5:

$$2 \cdot 11 + 5 = 22 + 5 = 27$$

■ EJEMPLO 18.10

Divide 35 objetos en dos partes tales que el doble de una de ellas sea cinco veces la otra.

Solución

x : Una de las partes y : La otra parte

Las dos partes tienen que sumar 35: $x + y = 35$

El doble de una parte es cinco veces la otra: $2x = 5y$

Luego nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 70 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$
$$\hline 2y + 5y = 70 \Rightarrow 7y = 70 \Rightarrow y = \frac{70}{7} = 10 \Rightarrow y = 10$$

De la primera ecuación:

$$x = 35 - y = 35 - 10 = 25 \Rightarrow x = 25$$

■ EJERCICIOS

18.11 La suma de dos números es 28 y su diferencia es 14. Determina los números.

18.12 La suma de dos números es 210 y el mayor excede al menor en 30. ¿Cuáles son los números?

18.13 Divide 50 objetos en dos partes tales que el doble de una parte sea igual al triple de la otra.

18.14 La diferencia de dos números es $13\frac{1}{3}$ y el mayor excede en 9 al menor. Determina los números.

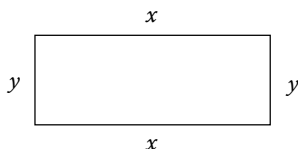
18.15 Determina dos números tales que su promedio sea 88,5 y que $\frac{1}{5}$ del mayor exceda en 3 a $\frac{3}{4}$ del menor.

■ EJEMPLO 18.11

La suma de las longitudes de los lados de un rectángulo es 360 m y la longitud del lado mayor es el triple de la del menor. Determina el área del rectángulo.

Solución

Si en un rectángulo llamamos y a la longitud del lado menor y x a la longitud del lado mayor, tal como se muestra a continuación:



podemos escribir, de acuerdo con el enunciado del problema:

La suma de las longitudes de los lados es igual a 360:

$$x + y + x + y = 2x + 2y = 360$$

La longitud del lado mayor es el triple de la del menor: $x = 3y$

Se forma así el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 360 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 180 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

restando las ecuaciones del sistema:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + y = 180 \\ x - 3y = 0 \end{cases} & \Rightarrow & y + 3y = 180 \Rightarrow 4y = 180 \Rightarrow y = \frac{180}{4} = 45 \Rightarrow y = 45 \end{array}$$

De la segunda ecuación:

$$x = 3y = 3 \cdot 45 = 135 \Rightarrow x = 135$$

Como el área del rectángulo es el producto de sus lados:

$$\text{Área} = x \cdot y = 45 \cdot 135 = 6.075$$

■ EJEMPLO 18.12

En un triángulo rectángulo, la medida de un ángulo agudo excede al doble de la medida del otro en 9 grados. Determina los dos ángulos.

Solución

Sean:

α : medida del ángulo mayor β : medida del ángulo menor

Como la suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90° , podemos escribir:

$$\alpha + \beta = 90$$

De acuerdo con el enunciado, uno de los ángulos agudos excede en 9 grados al doble del otro:

$$\alpha = 2\beta + 9$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90 \\ \alpha - 2\beta = 9 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90 \\ \alpha - 2\beta = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \alpha + \beta = 90 \\ \underline{\alpha - 2\beta = 9} \\ 3\beta = 81 \end{array} \Rightarrow 3\beta = 81 \Rightarrow \beta = \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow \beta = 27^\circ$$

De la primera ecuación:

$$\alpha = 90 - \beta = 90 - 27 = 63 \Rightarrow \alpha = 63^\circ$$

■ EJEMPLO 18.13

Las superficies de dos círculos están en la relación $25/16$ y la suma de las longitudes de sus circunferencias es 60π . Determina dichas superficies.

Solución

La superficie de un círculo está dada por:

$$A = \pi r^2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_1 = \pi r_1^2 & \text{(Primer círculo)} \\ A_2 = \pi r_2^2 & \text{(Segundo círculo)} \end{array} \right.$$

De acuerdo con el enunciado las superficies de los círculos están en la relación 25/16:

$$\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{25}{16}$$

Se deduce entonces que:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{25}{16} \quad \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{25}{16} \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad 4r_1 = 5r_2$$

La longitud de una circunferencia es:

$$L = 2\pi r \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_1 = 2\pi r_1 & \text{(Primera circunferencia)} \\ L_2 = 2\pi r_2 & \text{(Segunda circunferencia)} \end{array} \right.$$

De acuerdo con el enunciado del problema:

$$L_1 + L_2 = 60\pi \quad \Rightarrow \quad 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 60\pi \quad \Rightarrow \quad 2r_1 + 2r_2 = 60$$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4r_1 - 5r_2 = 0 \\ r_1 + r_2 = 30 \end{array} \right.$$

Multiplicando la segunda ecuación por 4 y restando:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4r_1 - 5r_2 = 0 \\ 4r_1 + 4r_2 = 120 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \hline -5r_2 - 4r_2 = -120 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad -9r_2 = -120 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{-120}{-9} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 13,33$$

De la segunda ecuación:

$$r_1 = 30 - r_2 = 30 - 13,33 = 16,67 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 16,67$$

Las superficies en m² son entonces:

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi(16,67)^2 = 873,01$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi(13,33)^2 = 558,22$$

■ EJERCICIOS

18.16 La suma de las longitudes de los lados de un rectángulo es 240 y la longitud del lado mayor excede en 20 al doble de la longitud del lado menor. Determina el área del rectángulo.

18.17 La diferencia de las longitudes de los lados de un paralelogramo es 24 y la medida del lado menor es igual a la mitad de la longitud del lado mayor disminuido en 2. Determina el perímetro del paralelogramo.

18.18 En un triángulo rectángulo, la medida de un ángulo agudo excede en 4 a $1/5$ de la medida del otro. ¿Cuáles son los ángulos?

18.19 Las superficies de dos círculos están en la relación $121/36$ y la suma de las longitudes de sus circunferencias es igual a 70π . Determina dichas superficies.

■ EJEMPLO 18.14

Si al numerador y denominador de una fracción se les resta 5, el resultado es $1/3$, y si al numerador se le suma 8 y al denominador se le resta 6, el resultado es 3. Determina la fracción.

Solución

Sean: x : numerador de la fracción y : denominador de la fracción

Al denominador y numerador se les resta 5: $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{3}$

Al numerador se le suma 8 y al denominador se le resta 6: $\frac{x+8}{y-6} = 3$

Arreglando las ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{3} \\ \frac{x+8}{y-6} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-15 = y-5 \\ x+8 = 3y-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y = 10 \\ x-3y = -26 \end{cases}$$

Multiplicando por 3 la primera ecuación y restando:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 9x-3y = 30 \\ x-3y = -26 \end{cases} & & \\ \hline 8x = 56 & \Rightarrow & x = \frac{56}{8} = 7 \Rightarrow x = 7 \end{array}$$

De la primera ecuación:

$$y = 3x - 10 = 3 \cdot 7 - 10 = 21 - 10 = 11 \quad \Rightarrow \quad y = 11$$

Luego, la fracción es $\frac{7}{11}$

■ EJEMPLO 18.15

La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 13. El número que se forma al invertir el número es 45 unidades menos que el número original. Determina el número.

Solución

Veamos primero cómo se puede representar un número de dos dígitos. Considera, por ejemplo, el número 58. Este número puede escribirse como:

$$58 = 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

Es decir, la cifra de las decenas, 5, aparece multiplicada por 10, mientras que las cifras de las unidades, 8, aparece multiplicada por 1. Esto es así para cualquier otro número de dos cifras. Por ejemplo:

$$72 = 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

$$35 = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Entonces, si a y b son las cifras de un número cualquiera, éste puede ser representado por:

$$\text{Número de dos cifras : } 10a + b \quad \left\{ \begin{array}{l} a : \text{ decenas} \\ b : \text{ unidades} \end{array} \right.$$

Invirtamos al número 58:

$$58 \Rightarrow 85 = 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Lo que indica que el número 8 se convirtió en el dígito de las decenas y el 5 en el dígito de las unidades. Luego, invertir un número dos cifras de a decenas y b unidades, es equivalente a escribir:

$$10a + b \quad \xrightarrow{\text{Invertido}} \quad 10b + a$$

De acuerdo con el enunciado del problema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{La suma de los dígitos: } a + b = 13 \\ \text{Número original: } 10a + b \\ \text{Número invertido: } 10b + a \end{array} \right\} \quad 10b + a = (10a + b) - 45$$

La segunda ecuación puede escribirse como:

$$10a + b - 10b - a = 45 \quad \Rightarrow \quad 9a - 9b = 45$$

Se forma así el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ a - b = 5 \quad (\text{dividiendo la segunda ecuación por 9}) \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ a - b = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 13 \\ -5 \\ \hline 18 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2a = 18 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{18}{2} = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 9$$

De la primera ecuación:

$$b = 13 - a = 13 - 9 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Luego, el número es 94. En efecto, si sumamos sus cifras: $9 + 4 = 13$

Si invertimos el número:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Invertido} & \text{El número original} \\ 94 & \rightarrow & 49 = 94 - 45 \end{array}$$

■ EJEMPLO 18.16

Omar tiene actualmente el doble de la edad de su hijo Sixto. Dentro de 5 años la suma de sus edades será 73 años. ¿Qué edad tienen los dos actualmente?

Solución

$$\begin{cases} \text{Edad actual de Omar: } x \\ \text{Edad actual de Sixto: } y \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x \\ y \end{cases}} \right\} x = 2y$$

Edad de Omar dentro de 5 años: $x + 5$

Edad de Sixto dentro de 5 años: $y + 5$

Suma de las edades de Omar y Sixto dentro de 5 años:

$$(x + 5) + (y + 5) = 73 \quad \Rightarrow \quad x + y = 63$$

Nos queda entonces el sistema:

$$\begin{array}{l} \text{Restamos} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x + y = 63 \end{array} \right. \\ \hline -3y = -63 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{63}{3} = 21 \quad \Rightarrow \quad y = 21 \end{array}$$

De la primera ecuación:

$$x = 2y = 2 \cdot 21 = 42 \quad \Rightarrow \quad x = 42$$

Luego:

Edad de Omar: 42 años

Edad de Sixto: 21 años

■ EJERCICIOS

18.20 Si al numerador y denominador de una fracción se le resta 3, el resultado es $\frac{1}{2}$, y si al numerador se le suma 3 y al denominador 1, el resultado es la unidad. Determina la fracción.

18.21 Si al numerador y denominador de una fracción se le resta 1 y el denominador se multiplica por 2, el resultado es $\frac{3}{4}$. Si la suma del numerador y el denominador es 12, determina la fracción.

18.22 La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 11. Si el número se invierte y se resta del número original resulta 63. Determina el número original.

18.23 La diferencia entre la cifra de las decenas y la de las unidades de un número de dos cifras es 5, y si el número se divide por la suma de sus cifras, el resultado es 8. Determina el número.

18.24 Héctor es 6 años más joven que su hermana Yosmar. Si la suma de ambas edades es 34 años, ¿qué edades tienen ambos?

18.25 El padre de Frank tiene 5 años más que el triple de la edad de su hijo. Hace cuatro años la suma de sus edades era 45 años. ¿Cuál es la edad de ambos?

19.1 LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

A una función de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

se le conoce con el nombre de *función cuadrática* y su representación gráfica es una parábola. Son ejemplos de funciones cuadráticas:

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (a = 1, b = -2, c = -3)$$

$$y = -2x^2 + x \quad (a = -2, b = 1, c = 0)$$

$$y = x^2 - 16 \quad (a = 1, b = 0, c = -16)$$

$$y = 5x^2 \quad (a = 5, b = 0, c = 0)$$

El movimiento de una pelota de beisbol cuando es bateada, describe una trayectoria parabólica y es ejemplo de la representación gráfica de una función cuadrática. Los faros de un automóvil, como se indica en la fig. 19.1, poseen una sección transversal parabólica. Si los rayos de luz tienen como origen un punto llamado *foco de la parábola*, se reflejan en la misma siguiendo una trayectoria paralela. A fin de dibujar la parábola correspondiente a una función cuadrática, es necesario darle valores a la variable x y determinar los correspondientes a y . El ejemplo que sigue ilustra el método.

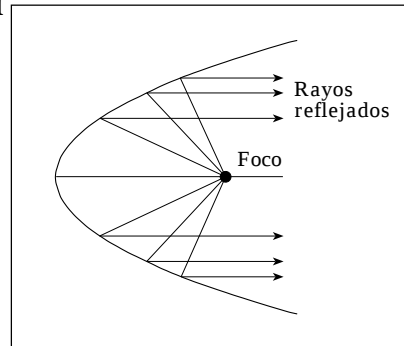


Fig. 19.1 Los faros de un automóvil tienen una sección transversal parabólica. Los rayos que salen del foco se reflejan en la parábola paralelamente entre sí.

■ EJEMPLO 19.1

Dibuja la parábola correspondiente a la función cuadrática:

$$y = x^2 - x + 2$$

Solución

Dándole valores a x podemos formar la siguiente tabla:

Valor de x	Valor de y	Puntos en el plano real
$x = -3$	$y = 9 + 3 + 2 = 14$	$P(-3, 14)$
$x = 3$	$y = 9 - 3 + 2 = 8$	$P(3, 8)$
$x = -2$	$y = 4 + 2 + 2 = 8$	$P(-2, 8)$
$x = 2$	$y = 4 - 2 + 2 = 4$	$P(2, 4)$
$x = -1$	$y = 1 + 1 + 2 = 4$	$P(-1, 4)$
$x = 1$	$y = 1 - 1 + 2 = 2$	$P(1, 2)$
$x = 0$	$y = 0 - 0 + 2 = 2$	$P(0, 2)$

En la fig. 19.2 se muestra la gráfica correspondiente a los puntos obtenidos. Es conveniente observar que la curva a dibujar entre los puntos obtenidos debe ser una curva suave, sin discontinuidades.

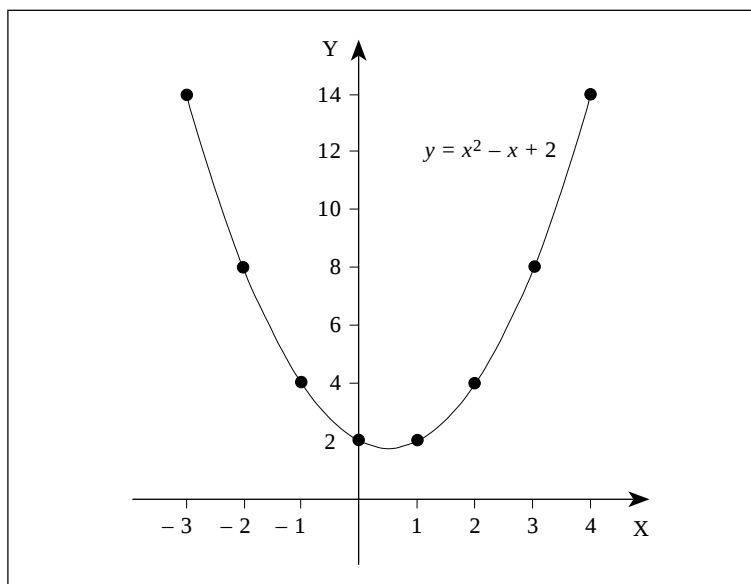


Fig. 19.2 Parábola correspondiente a la función $y = x^2 - x + 2$.

19.2 CONCAVIDAD DE UNA PARÁBOLA. EJE DE SIMETRÍA.

La representación gráfica de la función:

$$y = ax^2 + bx + c$$

puede adoptar cualquiera de las características mostradas en la fig. 19.3.

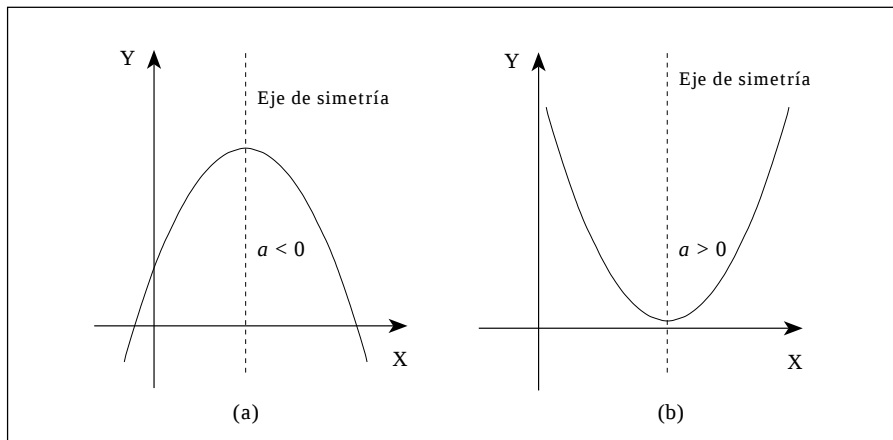


Fig. 19.3 Parábola con concavidad: a) Hacia abajo. b) Hacia arriba.

En el primer caso, fig. 19.3(a), se dice que *la concavidad es hacia abajo* y en el segundo caso, fig. 19.3(b), se dice que *la concavidad es hacia arriba*.

Observa que en los dos casos mostrados en la fig. 19.3 *existe un eje de simetría*. Este eje de simetría es siempre paralelo al eje de las Y y permite simplificar la construcción gráfica de cualquier parábola. Cuando $b = 0$, el eje de simetría es el eje Y.

A partir de la expresión para la función cuadrática, es fácil identificar si una parábola tiene su concavidad hacia arriba o hacia abajo. En efecto:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \text{concavidad hacia arriba.} \\ a < 0 \Rightarrow \text{concavidad hacia abajo.} \end{cases}$$

Así, en las parábolas:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 5x + 1 && \Rightarrow a = -1, \text{ concavidad hacia abajo.} \\ y &= -4x^2 + 12x - 8 && \Rightarrow a = -4, \text{ concavidad hacia abajo.} \\ y &= 3x^2 + 5x && \Rightarrow a = 3, \text{ concavidad hacia arriba.} \\ y &= 7x^2 - 3x - 12 && \Rightarrow a = 7, \text{ concavidad hacia arriba.} \end{aligned}$$

■ EJEMPLO 19.2

Determina la concavidad de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = -2x^2 - 4x + 3$

Dibuja las parábolas y comprueba tu respuesta. ¿Cuál es el eje de simetría en cada caso?

Solución

a) $y = x^2 - 4x + 4$: como $a = 1 > 0$, la concavidad es hacia arriba. Si damos valores a x , tendremos la siguiente tabla:

x	y	$P(x, y)$
-2	16	$P(-2, 16)$
-1	9	$P(-1, 9)$
0	4	$P(0, 4)$
1	1	$P(1, 1)$
2	0	$P(2, 0)$
3	1	$P(3, 1)$
4	4	$P(4, 4)$
5	9	$P(5, 9)$

En la fig. 19.4(a) se muestra la curva resultante. Como puede verse, en efecto, la concavidad es hacia arriba. El eje de simetría es una recta paralela al eje Y y que puede representarse por:

$$x = 2$$

b) $y = -2x^2 - 4x + 3$: como $a = -2 < 0$, la concavidad es hacia abajo. Si damos valores a x , tendremos la siguiente tabla:

x	y	$P(x, y)$
-3	-3	$P(-3, -3)$
-2	3	$P(-2, 3)$
-1	5	$P(-1, 5)$
0	3	$P(0, 3)$
1	-3	$P(1, -3)$
2	-13	$P(2, -13)$

Los valores de x se seleccionaron de manera que los valores de y resultantes sean de cómoda representación en el plano. El punto $P(2, -13)$ se sale un poco de esta norma. En la fig. 19.4(b) se muestra la curva resultante. Como se puede ver, el eje de simetría se encuentra sobre la recta $x = -1$.

19.3 MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA PARÁBOLA

El punto donde la parábola cambia de dirección (cuando está bajando comienza a subir o cuando está subiendo comienza a bajar), se conoce con el nombre de *vértice de la parábola*.

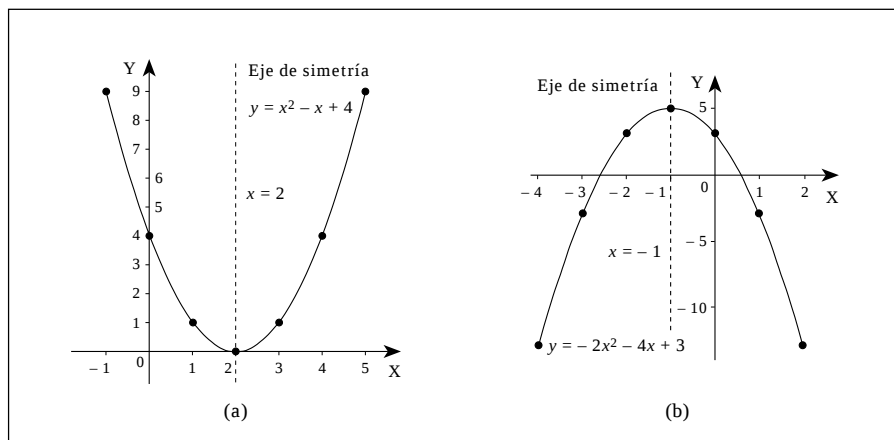


Fig. 19.4 Parábolas resultantes para el ejemplo 19.2.

El punto correspondiente al vértice puede ser un **máximo** o un **mínimo**. Cuando la concavidad es hacia arriba, como en el caso de la fig. 19.4(a), *el vértice es un mínimo*. Si la concavidad es hacia abajo, como en el caso de la fig. 19.4(b), *el vértice es un máximo*.

Como todo punto del plano real, el vértice tiene sus coordenadas que en este caso llamaremos x_m, y_m . Se puede demostrar que, dada la función.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Las coordenadas del vértice están dadas por:

$$x_m = -\frac{b}{2a}$$

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

(19.1)

La recta $x = -b/2a$ es también el eje de simetría de la parábola.

■ EJEMPLO 19.3

Determina el máximo o mínimo de las parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 2x - 2$

Dibuja, en los dos casos, las curvas correspondientes.

Solución

a) $y = x^2 - 4$: $a = 1$; $b = 0$; $c = -4$

Como $a > 0$, la concavidad es hacia arriba y el punto $P(x_m, y_m)$ es un mínimo. Entonces:

$$x_m = -\frac{0}{2-1} = 0 \qquad y_m = \frac{4 \cdot 1 \cdot (-4)}{4 \cdot 1} = -4$$

Luego: $P(x_m, y_m) = P(0, -4)$

Si hacemos una tabla de valores de la función, obtenemos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

En la fig. 19.5 se muestra la parábola resultante.

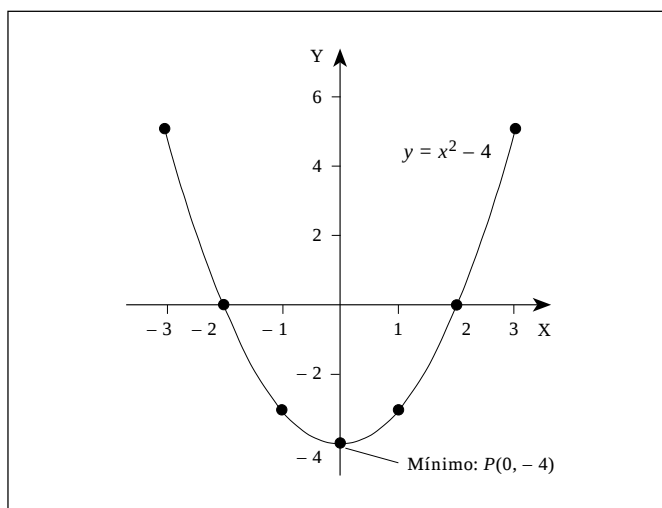


Fig. 19.5 Parábola para el ejemplo 19.3(a).

b) $y = -x^2 + 2x - 2$: $a = -1$; $b = 2$; $c = -2$

Como $a = -1 < 0$, la concavidad es hacia abajo y la parábola tiene un máximo. Las coordenadas de este máximo son:

$$x_m = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1 \qquad y_m = \frac{4 \cdot (-1) \cdot (-2) - 2^2}{4 \cdot (-1)} = -1$$

Luego:

$$P(x_m, y_m) = P(1, -1)$$

Si hacemos una tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10

En la fig. 19.6 se muestran los resultados.

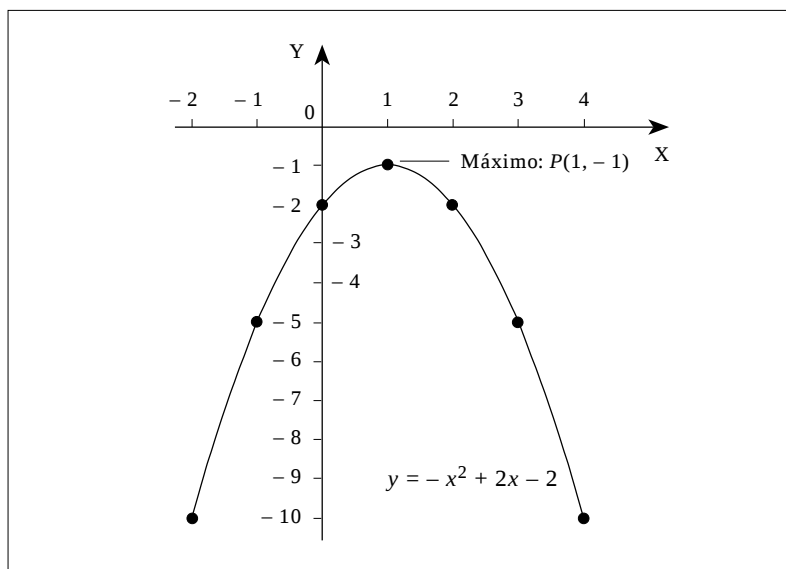


Fig. 19.6 Parábola para el ejemplo 19.3 (b).

14.4 CORTE DE UNA PARÁBOLA CON LOS EJES CARTESIANOS

Cuando se dibuja la parábola correspondiente a la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, se pueden encontrar los casos presentados a continuación:

- a) La parábola es cóncava hacia arriba y por tanto presenta un mínimo. Presenta también la curva dos puntos de corte con el eje X y un punto de corte con el eje Y. Ver fig. 19.7(a).
- b) La parábola es cóncava hacia arriba, presenta un mínimo y un solo punto de corte con el eje X. Tiene también un punto de corte con el eje Y. Ver fig. 19.7(b).
- c) La parábola es cóncava hacia arriba, presenta un mínimo y no posee puntos de corte con el eje X. Tiene un punto de corte con el eje Y. Ver fig. 19.7(c).

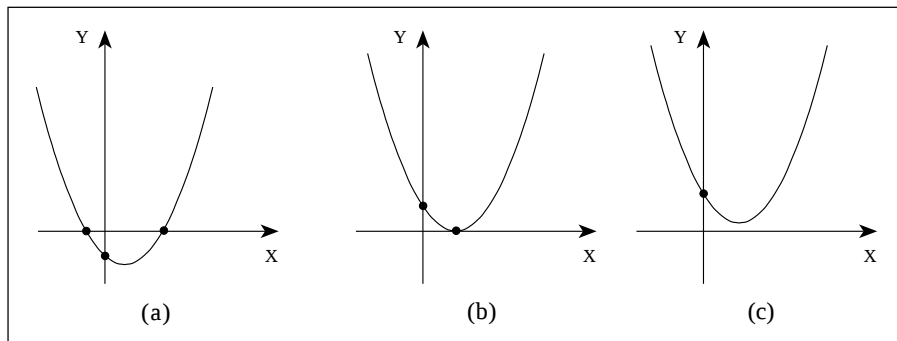


Fig. 19.7 Parábola cóncava hacia arriba.

d) La parábola es cóncava hacia abajo, presenta un máximo, tiene dos puntos de corte con el eje X y un punto de corte con el eje Y. Ver fig. 19.8(a)

e) La parábola es cóncava hacia abajo, presenta un máximo, tiene un punto de corte con el eje Y y un punto de corte con el eje X. Ver fig. 19.8(b).

f) La parábola es cóncava hacia abajo, presenta un máximo, tiene un punto de corte con el eje Y y no tiene punto de corte con el eje X. Ver fig. 19.8(c).

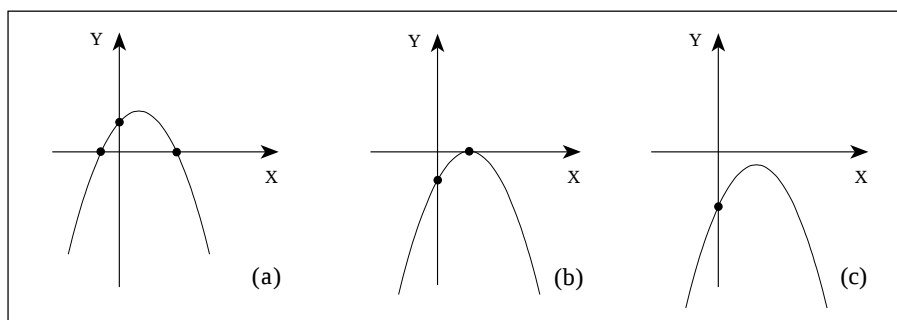


Fig. 19.8 Parábola cóncava hacia abajo.

De las figuras estudiadas, podemos concluir lo siguiente:

1. La parábola sólo tiene un punto de corte con el eje Y.
2. La parábola puede tener uno, dos o ningún punto de corte con el eje X.

A los puntos de corte con el eje X se les denomina raíces de la ecuación cuadrática dada por:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyo estudio se abordará en el próximo objetivo. En esa oportunidad aprenderemos a obtener dichos puntos de corte.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$ en la función cuadrática:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_c = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{y_c = c} \quad (19.2)$$

Es decir, el punto de corte con el eje Y, y_c , es el término c de la función cuadrática.

Para determinar si una parábola no corta al eje X, hay que tomar en cuenta su concavidad y el valor y_m del punto máximo o mínimo. Los dos casos donde esto sucede se muestran nuevamente a continuación.

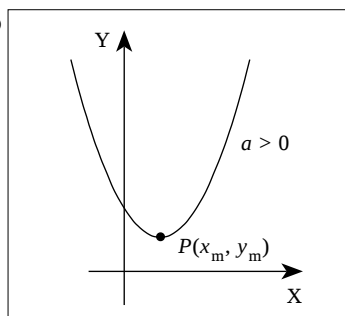
a) Si la parábola posee un mínimo ($a > 0$), (ver fig. 19.9), la ordenada y_m del vértice

debe ser mayor que cero para que la parábola no toque o cruce al eje de las X. Esto requiere, según la relación (19.1) que:

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a} > 0$$

Es decir:

$$4ac - b^2 > 0$$



Es decir, para que la parábola no toque al eje de las X, se necesita que:

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (19.3)$$

b) Si la parábola posee un máximo ($a < 0$), ver fig. 19.10, la ordenada del vértice, y_m , debe ser menor que cero para que la parábola no toque o cruce al eje de las X. Esto requiere:

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a} < 0 \Rightarrow 4ac - b^2 < 0$$

Es decir, para que la parábola no toque al eje de las X, se necesita que:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (19.4)$$

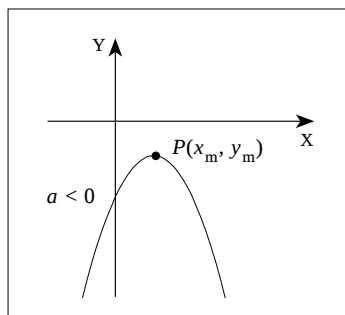


Fig. 19.10 Parábola con un máximo.

■ EJEMPLO 19.4

Dadas las siguientes funciones:

$$1) y = x^2 + 6x + 8$$

$$2) y = 2x^2 - x + 2$$

Determina: **a)** La concavidad. **b)** El máximo o mínimo de la función. **c)** El eje de simetría. **d)** El punto de corte con el eje Y. **e)** Dibuja la curva, y a partir del gráfico obtenido, encuentra los valores aproximados del corte con el eje X.

Solución

$$1) y = x^2 + 6x + 8 \Rightarrow a = 1; b = 6; c = 8$$

a) Como $a = 1 > 0$, la concavidad es hacia arriba y la parábola tiene un mínimo.

b) Se tiene:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 8 - 36}{4} = \frac{32 - 36}{4} = -1$$

El mínimo corresponde al punto $P(-3, -1)$.

c) El eje de simetría corresponde a $x = x_m = -3$.

d) El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$ en la función dada, relación 19.2. Se obtiene así:

$$y_c = 8$$

e) Los siguientes valores y las indicaciones dadas por los cálculos anteriores, permiten dibujar la parábola de la fig. 19.11.

x	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
y	8	3	0	-1	0	3	8

Observa que como:

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 > 0$$

la curva corta al eje X. De la figura se obtienen los puntos de corte en $x = -2$ y $x = -4$.

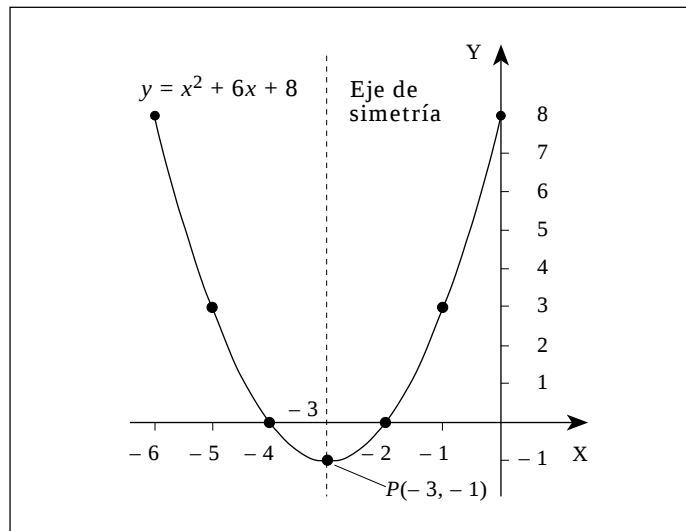


Fig. 19.11 Parábola para el ejemplo 19.4(1).

2) $y = 2x^2 - x + 2 \Rightarrow a = 2; b = -1; c = 2$

a) Como $a = 2 > 0$, la concavidad es hacia arriba y la parábola tiene un mínimo.

b) Se tiene:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{4} = 0,25$$

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2 - (-1)^2}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1,875$$

Luego, el mínimo corresponde al punto $P(0,25; 1,875)$.

c) El eje de simetría corresponde a $x = x_m = 0,25$.

d) El punto de corte con el eje Y es $y_c = 2$.

e) Haciendo una tabla de valores:

x	-1	0	0,25	1	2
y	5	2	1,88	3	8

En la fig. 19.12 se muestra la parábola correspondiente a los puntos de la tabla.

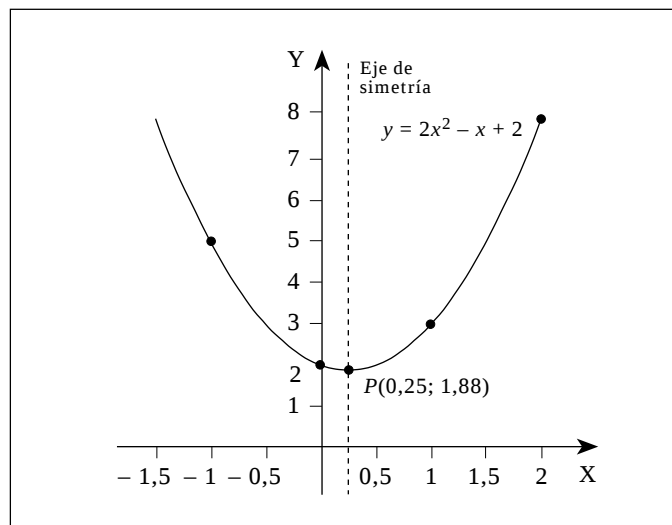


Fig. 19.12 Parábola para el ejemplo 19.4(2).

Observa que como:

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 < 0$$

de acuerdo con (19.3), no existen puntos de corte con el eje X.

◆ EJERCICIOS

19.1 Dibuja las parábolas correspondientes a las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 2x^2$

b) $y = -2x^2$

c) $y = x^2 - 1$

d) $y = x^2 - 3x - 4$

e) $y = -x^2 + 3x + 2$

f) $y = 2x^2 + x - 6$

19.2 Determina la concavidad de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 3$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

Dibuja las parábolas y comprueba tu respuesta. ¿Cuál es el eje de simetría en cada caso?

19.3 Dibuja los gráficos de las funciones:

a) $y = 2x^2 + 8$

b) $y = -2x^2 + 8$

¿Qué diferencias notas entre los dos gráficos? ¿En qué difieren las dos relaciones?

19.4 Dibuja los gráficos de las funciones:

a) $y = x^2 - 3$

b) $y = x^2 + 2x - 3$

¿Qué diferencias notas entre los dos gráficos? ¿En qué difieren las dos relaciones?

19.5 Dibuja las parábolas correspondientes a las funciones:

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 + 2$

c) $y = x^2 - 2$

¿Qué diferencias notas en las curvas? ¿En qué difieren las tres relaciones?

19.6 Determina el máximo o mínimo de las parábolas dadas por las funciones:

a) $y = x^2 - 4x - 4$

b) $y = -x^2 + x - 4$

c) $y = 3x^2 + 6x - 9$

d) $y = x^2 + 12$

e) $y = 2x^2 + x - 6$

f) $y = -x^2 + x$

Dibuja, en cada caso, la curva correspondiente.

19.7 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 1$

b) $y = x^2 - 5x + 7$

c) $y = -x^2 + 5$

d) $y = x^2 - 2x + 3$

e) $y = x^2 - 1$

f) $y = -3x^2 + 5x + 10$

Determina: **1)** La concavidad. **2)** El máximo o mínimo de la función. **3)** El eje de simetría. **4)** El punto de corte con el eje Y. **5)** Utiliza las relaciones 19.3 y 19.4 para confirmar si las parábolas cortan al eje X. **6)** Dibuja las curvas y a partir de los gráficos obtenidos, obtén los valores aproximados del corte con el eje X.

20.1 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación es una relación que envuelve cantidades desconocidas llamadas *incógnitas*. Una ecuación cuadrática es una ecuación que contiene la incógnita elevada a la segunda potencia. Como ejemplos de ecuaciones cuadráticas tenemos:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2 - 14 = 0$$

$$-10t^2 + 60t - 24 = 0$$

$$3m^2 + 5m - 8 = 0$$

Resolver una ecuación cuadrática es encontrar los *dos valores* de la incógnita que la satisfacen. A estos valores se les denomina *raíces o ceros de la ecuación*. Aun cuando las raíces de una ecuación de segundo grado pueden no pertenecer a $\mathbf{R}$, en este texto asumiremos que las raíces son reales.

Una ecuación de segundo grado tiene dos raíces

En general, una ecuación de segundo grado tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (20.1)$$

donde a y b son números reales con $a \neq 0$.

La ecuación de segundo grado, una vez resuelta, determina los valores donde la parábola correspondiente a la función cuadrática,

$$y = ax^2 + bx + c$$

corta al eje X.

De acuerdo con los coeficientes b y c , de la ecuación cuadrática podemos tener:

$$\text{Si } b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \text{ (ecuación cuadrática pura)}$$

$$\text{Si } c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$$

A continuación estudiamos los métodos de solución de una ecuación cuadrática.

20.2 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA PURA

Una ecuación cuadrática pura no contiene términos en x y es de la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

El método para resolver esta ecuación envuelve los siguientes pasos:

- a) Se aísla el término que contiene x^2 , transponiendo el término independiente al otro lado de la ecuación. $\Rightarrow ax^2 = -c$
- b) Se pasa el coeficiente de x^2 , a , al otro miembro de la ecuación, dividiendo a c . $\Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$
- c) Se saca la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación. Observa que la raíz cuadrada siempre da origen a dos cantidades con igual valor absoluto y signos opuestos. $\Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

■ EJEMPLO 20.1

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $9x^2 - 100 = 0$

b) $4x^2 - 45 = 0$

c) $81 - \pi r^2 = 0$

Solución

a) $9x^2 - 100 = 0$

$$9x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{9} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{100}{9}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}} \Rightarrow x = \pm \frac{10}{3}$$

b) $4x^2 - 45 = 0$

$$4x^2 = 45 \Rightarrow x^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{45}{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{9 \cdot 5}}{\sqrt{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

c) $81 - \pi r^2 = 0$

$$-\pi r^2 = -81 \Rightarrow \pi r^2 = 81 \Rightarrow r^2 = \frac{81}{\pi} \Rightarrow r = \pm \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow r = \pm \frac{9}{\sqrt{\pi}}$$

◆ EJERCICIO 20.1

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas puras:

a) $x^2 - 81 = 0$

b) $16x^2 - 9 = 0$

c) $32x^2 - 1 = 0$

d) $9x^2 - 10^{10} = 0$

e) $x^2 - 64 = 0$

f) $8x^2 - 169 = 0$

g) $50x^2 - 144 = 0$

h) $V - \pi x^2 h = 0$

i) $x^2 - 10^{11} = 0$

20.3 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA MEDIANTE FACTORIZACIÓN

A fin de resolver una ecuación cuadrática mediante factorización, es conveniente recordar lo siguiente:

a) Si un producto es igual a cero, al menos uno de los factores es igual a cero. Es decir, si:

$$a \cdot b = 0$$

es porque $a = 0$ o porque $b = 0$. Similarmente, si:

$$(x - a) \cdot (x - b) = 0$$

es porque $(x - a) = 0$ o porque $(x - b) = 0$. Para este segundo caso se deduce que:

$$x = a \qquad x = b$$

b) Cuando se tiene un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, es posible, en algunos casos, hacer la descomposición:

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$$

donde:

$$a + b = p \qquad ab = q$$

Es decir, la suma de a y b es igual al coeficiente p del trinomio y el producto de a y b es igual al término independiente del trinomio. La revisión anterior permite resolver fácilmente ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 + px + q = 0$, tal como lo indican los ejemplos que siguen.

■ EJEMPLO 20.2

Mediante descomposición factorial, resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba que el resultado, en cada caso, es correcto.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 + 3x - 10$

Solución

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$: tenemos que buscar dos números cuyo producto sea 8 y cuya suma sea -6. Estos números son -4 y -2. Puede, por tanto, escribirse:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2) = 0$$

De acuerdo con lo ya explicado, debe cumplirse:

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Para probar que $x = 4$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación dada, sustituimos estos valores en $x^2 - 6x + 8$:

$$x = 4 \Rightarrow 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 16 - 24 + 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4 - 12 + 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

b) $x^2 - x - 2 = 0$: tenemos que buscar dos números cuyo producto sea -2 y cuya suma sea -1 . Estos números son -2 y 1 . Luego:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$$

Entonces:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 - 2 - 2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^2 - (-1) - 2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$: tenemos que buscar dos números cuyo producto sea -10 y cuya suma sea 3 . Estos números son 5 y -2 . Luego:

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2) = 0$$

De donde se obtiene:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$x = -5 \Rightarrow (-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 10 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 25 - 15 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 + 3 \cdot 2 - 10 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4 + 6 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

◆ EJERCICIO 20.2

Mediante factorización, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + x - 12 = 0$

b) $x^2 + 4x - 5 = 0$

c) $x^2 + 10x = 0$

d) $x^2 + x - 42 = 0$

e) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

f) $x^2 - 8x - 33 = 0$

20.4 EL CUADRADO DE LA SUMA COMO MÉTODO PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Sabemos, de estudios anteriores, que:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

También, dada la ecuación:

$$(x + m)^2 = n$$

su solución se obtiene extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros de la misma:

$$x + m = \pm \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad x = -m \pm \sqrt{n}$$

El método que desarrollaremos a continuación, puede usarse para resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática. Aunque largo, es un método de mucha utilidad en Matemática.

■ EJEMPLO 20.3

Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

Solución

Paso 1: se transpone el término independiente al segundo miembro de la ecuación. $\Rightarrow x^2 + 6x = 7$

Paso 2: se completa el cuadrado perfecto en el primer miembro. Para ello *se suma a ambos miembros la mitad del coeficiente de x elevada al cuadrado*, en este caso 9. $\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 16$

Paso 3: se escribe el primer miembro como el cuadrado de una suma. $\Rightarrow (x + 3)^2 = 16$

Paso 4: se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la relación anterior. $\Rightarrow x + 3 = \pm 4$

Paso 5: se obtiene los valores de x .

La ecuación, como era de esperarse, tiene dos soluciones: 1 y -7. $\Rightarrow x = \begin{cases} +4 - 3 = 1 \\ -4 - 3 = -7 \end{cases}$

Para comprobar que, efectivamente, las soluciones son válidas, sustituimos en la ecuación original:

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 6 \cdot 1 - 7 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 1 + 6 - 7 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

$$x = -7 \Rightarrow (-7)^2 + 6 \cdot (-7) - 7 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 49 - 42 - 7 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (Identidad)}$$

■ EJEMPLO 20.4

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 20x + 19 = 0$

b) $x^2 + 7x - 8 = 0$

Solución

Paso 1: pasando 19 al segundo miembro. $\Rightarrow x^2 + 20x = -19$

Paso 2: se completa el cuadrado perfecto en el primer miembro. Para ello se suma a ambos miembros el cuadrado de la mitad de 20. $\Rightarrow x^2 + 20x + \left(\frac{20}{2}\right)^2 = -19 + \left(\frac{20}{2}\right)^2$
 $x^2 + 20x + 100 = -19 + 100$

$$x^2 + 20x + 100 = 81$$

Paso 3: se escribe el primer miembro como un cuadrado perfecto. $\Rightarrow (x + 10)^2 = 81$

Paso 4: se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros. $\Rightarrow (x + 10) = \pm \sqrt{81}$
 $\Rightarrow x + 10 = \pm 9$

Paso 5: se obtiene el valor de x . $\Rightarrow \begin{cases} x = -10 + 9 = -1 \\ x = -10 - 9 = -19 \end{cases}$

Las dos soluciones son $x = -1$ y $x = -19$.

b) Paso 1: $x^2 + 7x = 8$

Paso 2: $x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 8 + \frac{49}{4} \Rightarrow x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{81}{4}$$

Paso 3: $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

Paso 4: $x + \frac{7}{2} = \pm \sqrt{\frac{81}{4}} \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$

Paso 5: $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{16}{2} = -8 \end{cases}$

Soluciones de la ecuación: $x_1 = 1$ y $x_2 = -8$.

◆ EJERCICIO 20.3

Mediante el método del cuadrado de la suma, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 14x + 24 = 0$

c) $x^2 - 12x - 45 = 0$

d) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

e) $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

f) $2x^2 - x - 3 = 0$

20.5 LA FÓRMULA CUADRÁTICA PARA RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado se basa en el método estudiado en la sección anterior. Sin embargo, se parte de la forma general, $ax^2 + bx + c$, de la ecuación cuadrática, para llegar a una expresión que permite agilizar el proceso de obtener la solución.

Considera la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Si dividimos toda la ecuación por a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Pasando el término independiente al segundo miembro:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

A fin de formar un cuadrado perfecto en el primer miembro, sumamos la mitad del coeficiente del segundo término elevado al cuadrado:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac^2 + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada a ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Despejando x :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (20.2)$$

que es la *fórmula cuadrática* para resolver una ecuación de segundo grado.

La fórmula (20.2) establece que las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(20.3)

Estas soluciones son los puntos donde la parábola representada por la función $y = ax^2 + bx + c$ corta al eje X. A tales puntos se les conocen con el nombre de *raíces* de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Cuando se utilizan las relaciones (20.3), es siempre conveniente eliminar los coeficientes fraccionarios de la ecuación de segundo grado.

Observa también que a fin de que los valores de las raíces sean reales, es necesario que:

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

ya que de otra forma, si $b^2 - 4ac < 0$, la cantidad bajo el signo de la raíz es negativa y las raíces se dicen que son *imaginarias*. En este caso, la parábola que representa a la función $ax^2 + bx + c$ no corta al eje X. A la cantidad $b^2 - 4ac$ se le conoce como *discriminante* de la ecuación.

Por otra parte, si $b^2 - 4ac = 0$, las dos raíces de la ecuación son iguales a:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b}{2a}} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b}{2a}} \quad (20.4)$$

■ EJEMPLO 20.5

Mediante la fórmula cuadrática, determina la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

Solución

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$. Se tiene: $a = 1$ $b = -5$ $c = 4$

El valor del discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0 \quad (\text{Raíces reales})$$

Las raíces están dadas por (20.3):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$. Se tiene: $a = 2$ $b = -7$ $c = 6$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Entonces:

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

■ EJEMPLO 20.6

En las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - x + 2 = 0$

- 1) Determina, sin resolver la ecuación, si la parábola correspondiente corta al eje X. 2) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? 3) Dibuja las parábolas que representan a las funciones dadas.

Solución

a) $a = 1 \quad b = 6 \quad c = 8$

- 1) El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$$

Como $b^2 - 4ac > 0$, las raíces de la ecuación son reales y la parábola corta al eje X.

- 2) Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 + 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

- 3) En la fig. 20.1 se muestra la figura correspondiente a la parábola. Observa los puntos de corte sobre el eje X.

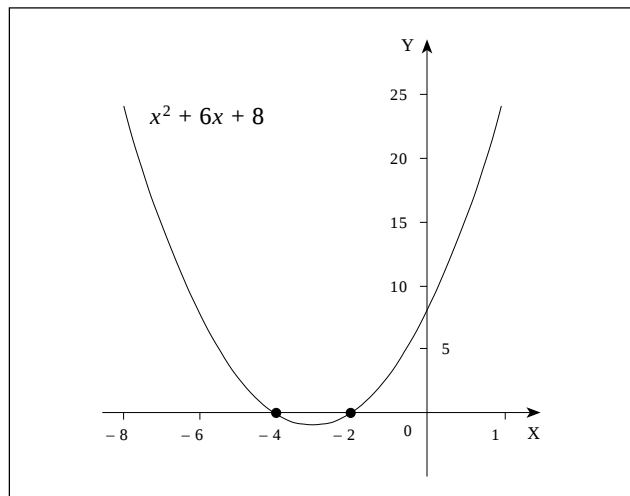


Fig. 20.1 La parábola $x^2 + 6x + 8$ corta al eje X en $x = -2$ y $x = -4$.

b) $a = 2 \quad b = -1 \quad c = 2$

1) Calculemos el discriminante:

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$$

Como $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no corta al eje X.

2) Las raíces de la ecuación no existen en el dominio de los reales.

En la fig. 20.2 se muestra la parábola correspondiente. Como puedes ver, la parábola no corta al eje X.

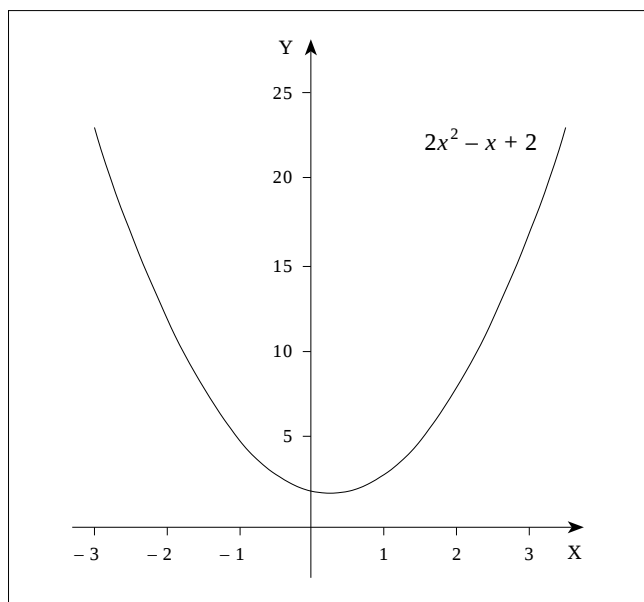


Fig. 20.2 La parábola dada por $y = 2x^2 - x + 2$ no corta al eje X.

■ EJEMPLO 20.7

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - \frac{5}{6}x + 2 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{10}x - \frac{1}{5} = 0$ c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Solución

a) Multiplicando por 6 toda la ecuación, eliminamos el coeficiente fraccionario:

$$6x^2 - \frac{5 \cdot 6}{6}x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 5x + 12 = 0$$

El discriminante del sistema es:

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12 = 25 - 288 = -263 < 0$$

Como $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

b) Multiplicando toda la ecuación por 10 que es el m.c.m. entre 2, 5 y 10, eliminamos los denominadores:

$$\frac{10 \cdot 1}{2}x^2 + \frac{9 \cdot 10}{10}x - \frac{10 \cdot 1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 9x - 2 = 0$$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 81 + 40 = 121 > 0$$

Como $b^2 - 4ac > 0$, las raíces de la ecuación son reales y están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{121}}{10} = \frac{-9 + 11}{10} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{121}}{10} = \frac{-9 - 11}{10} = \frac{-20}{10} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$$

c) El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$$

Como $b^2 - 4ac = 0$, las dos raíces de la ecuación son iguales:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-10)}{2 \cdot 1} = 5 \quad x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-10)}{2 \cdot 1} = 5$$

Es decir, $x_1 = x_2 = 5$.

◆ EJERCICIO 20.4

Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $x^2 - 3x - 28 = 0$ | b) $2x^2 - 9x - 5 = 0$ | c) $12x^2 - 5x - 2 = 0$ |
| d) $-6x^2 + 26x - 8 = 0$ | e) $9x^2 + 6x - 3 = 0$ | f) $3y^2 - 14y + 16 = 0$ |
| g) $-15t^2 - 15t + 30 = 0$ | h) $2x^2 - 20x - 22 = 0$ | i) $x^2 + 2x + 100 = 0$ |

◆ EJERCICIO 20.5

En las ecuaciones siguientes:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ | b) $2x^2 + 7x + 10 = 0$ | c) $x^2 + x - 6 = 0$ |
|-----------------------|-------------------------|----------------------|

1) Determina, sin resolver la ecuación, si la parábola correspondiente corta al eje X. 2) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? 3) Dibuja las parábolas que representan a las funciones dadas.

◆ EJERCICIO 20.6

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - 2 = 0 & \text{b)} \quad -\frac{1}{5}x^2 + \frac{31}{15}x - \frac{2}{3} = 0 & \text{c)} \quad 2x^2 - \frac{13}{7}x - \frac{1}{7} = 0 \\ \text{d)} \quad \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16} = 0 & \text{e)} \quad x^2 - \frac{1}{4} = 0 & \text{f)} \quad x^2 - 5 = 0 \end{array}$$

20.6 ECUACIONES CUADRÁTICAS CON LA INCÓGNITA EN EL DENOMINADOR

En algunos casos, cuando la incógnita figura en el denominador, se originan, al efectuar las operaciones adecuadas, ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$. En los ejemplos siguientes se discuten varios casos.

■ EJEMPLO 20.8

Resuelve las ecuaciones:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x} + x = -\frac{26}{5} \qquad \text{b)} \quad \frac{x}{x+1} - 3x = -\frac{16}{3}$$

Solución

a) Para eliminar los denominadores, multiplicamos toda la ecuación por $5x$:

$$\frac{5x}{x} + (5x)x = -\frac{(26)5x}{5} \quad \Rightarrow \quad 5 + 5x^2 = -26x \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 26x + 5 = 0$$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (26)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 676 - 100 = 576 > 0$$

Las dos raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-26 + \sqrt{576}}{10} = \frac{-26 + 24}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} & \Rightarrow & \quad x_1 = -\frac{1}{5} \\ x_2 &= \frac{-26 - \sqrt{576}}{10} = \frac{-26 - 24}{10} = -\frac{50}{10} = -5 & \Rightarrow & \quad x_2 = -5 \end{aligned}$$

b) Para eliminar los denominadores, multiplicamos toda la ecuación por $3(x+1)$:

$$\frac{3(x+1)x}{x+1} - 3(x+1)3x = -\frac{3(x+1)16}{3} \Rightarrow 3x - 9x(x+1) = -16(x+1)$$

Efectuando operaciones:

$$3x - 9x^2 - 9x = -16x - 16 \Rightarrow -9x^2 + 3x - 9x + 16x + 16 = 0$$

$$-9x^2 + (3 - 9 + 16)x + 16 = 0 \Rightarrow -9x^2 + 10x + 16 = 0$$

Cambiando de signo a toda la ecuación: $9x^2 - 10x - 16 = 0$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 100 + 576 = 676 > 0$$

Las dos raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-(-10) + \sqrt{676}}{2 \cdot 9} = \frac{10 + 26}{18} = \frac{36}{18} = 2 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-10) - \sqrt{676}}{2 \cdot 9} = \frac{10 - 26}{18} = -\frac{16}{18} = -\frac{8}{9} \Rightarrow x_2 = -\frac{8}{9}$$

◆ EJERCICIO 20.7

Resuelve las ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{x}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{1}{20} \quad \text{b) } \frac{x}{x-1} - \frac{2-x}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{c) } \frac{(x-3)^2}{x} - 2 = \frac{x-2}{2} - \frac{27}{10}$$

$$\text{d) } \frac{7}{x+1} = \frac{x}{3-x} - \frac{19}{6} \quad \text{e) } \frac{5}{x^2} - \frac{9}{200} = \frac{1}{2x^2} \quad \text{f) } \frac{x-2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

20.7 ECUACIONES CON TÉRMINOS IRRACIONALES

Algunas ecuaciones que tienen términos irracionales se resuelven elevando convenientemente al cuadrado la ecuación dada. Resulta así una ecuación de segundo grado que se resuelve por los métodos ya estudiados. Cuando esto se hace, sin embargo, se introducen en la solución raíces extrañas que no satisfacen la ecuación original. De allí que sea necesario verificar las soluciones resultantes.

■ EJEMPLO 20.9

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \sqrt{x-3} = x-5$$

$$\text{b) } 4 + \sqrt{11-2x} = x$$

Solución

a) Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2 \quad \Rightarrow \quad x-3 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 10x + 25 - x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x + 28 = 0$$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28 = 121 - 112 = 9 > 0$$

Luego:

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{9}}{2} = \frac{11 + 3}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 7$$

$$x_2 = \frac{11 - \sqrt{9}}{2} = \frac{11 - 3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$$

Probemos las dos soluciones en la ecuación original. Para $x_1 = 7$:

$$\sqrt{x-3} = x-5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7-3} = 7-5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2 \quad (\text{Identidad})$$

Para $x_2 = 4$:

$$\sqrt{x-3} = x-5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-3} = 4-5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 \neq -1 \quad (\text{Desigualdad})$$

En el caso de la raíz $x = 4$ no se produce una identidad al sustituir ese valor en la ecuación original y no es, por tanto, una solución.

b) Primero pasamos 4 al segundo miembro de la ecuación:

$$\sqrt{11-2x} = x-4$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(\sqrt{11-2x})^2 = (x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad 11-2x = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 - 11 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$$

Luego:

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Probando $x = 5$ en la ecuación original:

$$4 + \sqrt{11 - 2x} = x \quad \Rightarrow \quad 4 + \sqrt{11 - 2 \cdot 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad 4 + \sqrt{1} = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 5 \text{ (Identidad)}$$

Para $x_2 = 1$:

$$4 + \sqrt{11 - 2 \cdot 1} = 5 \quad \Rightarrow \quad 4 + \sqrt{9} = 5 \quad \Rightarrow \quad 7 \neq 5 \text{ (Desigualdad)}$$

Entonces, $x = 1$ no es una solución de la ecuación.

◆ EJERCICIO 20.8

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+2} = x$

b) $\sqrt{3x+7} = x-1$

c) $10 - \sqrt{12-2x} = x+8$

d) $3 + \sqrt{2x-6} = x$

e) $\sqrt{2(x-5)(x+2)} = x+2$

f) $x - \sqrt{x} = 0$

21.1 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones cuadráticas aparecen en una amplia variedad de problemas en los campos científico y técnico. Como ya sabes resolver ecuaciones cuadráticas, la única dificultad que hay que solventar es la de trasladar las expresiones en Castellano al lenguaje matemático.

En esta sección se discuten varios tipos de problemas que dan origen a ecuaciones cuadráticas.

■ EJEMPLO 21.1

El cuadrado de un número excede a dicho número en 30. Determinalo.

Solución

El número: x El cuadrado del número: x^2

De acuerdo con el enunciado: $x^2 = x + 30$

Arreglando la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 1 + 120 = 121 > 0$$

Las dos raíces son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \sqrt{121}}{2} = \frac{1 + 11}{2} = \frac{12}{2} = 6 & \Rightarrow & x_1 = 6 \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{121}}{2} = \frac{1 - 11}{2} = \frac{-10}{2} = -5 & \Rightarrow & x_2 = -5 \end{aligned}$$

Las dos soluciones cumplen con el enunciado del problema:

$$\begin{aligned} x_1 = 6 & \Rightarrow 36 = 6 + 30 \Rightarrow 36 = 36 \\ x_2 = -5 & \Rightarrow 25 = -5 + 30 \Rightarrow 25 = 25 \end{aligned}$$

■ EJEMPLO 21.2

Determina dos enteros pares consecutivos tales que el cuadrado del menor exceda al mayor en 54.

Solución

Número entero par: $2x$ (Número menor)

Entero par que sigue al anterior: $2x + 2$ (Número mayor)

Siguiendo el enunciado del problema: $(2x)^2 = (2x + 2) + 54$

Efectuando operaciones:

$$4x^2 = 2x + 56 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 2x - 56 = 0$$

Dividiendo la ecuación por 2:

$$2x^2 - x - 28 = 0$$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-28) = 1 + 224 = 225 > 0$$

Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-1) + \sqrt{225}}{4} = \frac{1 + 15}{4} = \frac{16}{4} = 4 & \Rightarrow & x_1 = 4 \\ x_2 &= \frac{-(-1) - \sqrt{225}}{4} = \frac{1 - 15}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} & \Rightarrow & x_2 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Primer número: $2x : \begin{cases} 2 \cdot 4 = 8 \\ 2 \cdot (-\frac{7}{2}) = -7 \end{cases}$

Como el segundo número no es entero, se descarta la solución $x = -\frac{7}{2}$, porque contradice el enunciado del problema. Luego:

$$\text{Segundo número: } 2x + 2 = 8 + 2 = 10$$

■ EJEMPLO 21.3

La suma de los cuadrados de dos números es 157 y su diferencia es 5. Determina los números.

Solución

Sean m y n los números. Siguiendo el enunciado:

$$m^2 + n^2 = 157 \qquad m - n = 5$$

Despejando m de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$\begin{aligned} m &= 5 + n \Rightarrow (5 + n)^2 + n^2 = 157 \\ 25 + 10n + n^2 + n^2 &= 157 \Rightarrow 2n^2 + 10n - 132 = 0 \end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación por 2:

$$n^2 + 5n - 66 = 0$$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-66) = 25 + 264 = 289 > 0$$

Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-5 + \sqrt{289}}{2} = \frac{-5 + 17}{2} = \frac{12}{2} = 6 & \Rightarrow & n_1 = 6 \\ n_2 &= \frac{-5 - \sqrt{289}}{2} = \frac{-5 - 17}{2} = -\frac{22}{2} = -11 & \Rightarrow & n_2 = -11 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación de primer grado obtenemos el valor de m :

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 + n_1 = 5 + 6 = 11 & \Rightarrow & m_1 = 11 \\ m_2 &= 5 + n_2 = 5 - 11 = -6 & \Rightarrow & m_2 = -6 \end{aligned}$$

Tanto los números 6 y 11 como los números -6 y -11 satisfacen las condiciones del problema (compruébalo).

■ EJEMPLO 21.4

Un objeto lanzado verticalmente hacia abajo obedece a la siguiente relación:

$$d = 5t^2 + 80t$$

donde d es la distancia (metros) recorrida por el objeto al caer y t es el tiempo (segundos) que tarda en recorrer dicha distancia. **a)** ¿Qué tiempo necesita el objeto para caer 85 metros? **b)** ¿Qué distancia recorre el objeto durante los primeros 3 segundos?

Solución

a) Como $d = 85$ m, resulta la siguiente ecuación cuadrática:

$$5t^2 + 80t = 85 \quad \Rightarrow \quad 5t^2 + 80t - 85 = 0$$

Dividiendo por 5 obtenemos:

$$t^2 + 16t - 17 = 0$$

Se tiene:

$$b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17) = 256 + 68 = 324 > 0$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-16 + \sqrt{324}}{2} = \frac{-16 + 18}{2} = \frac{2}{2} = 1 & \Rightarrow & t_1 = 1 \\ t_2 &= \frac{-16 - \sqrt{324}}{2} = \frac{-16 - 18}{2} = -\frac{34}{2} = -17 & \Rightarrow & t_2 = -17 \end{aligned}$$

Aunque los dos valores encontrados satisfacen la ecuación original, no tiene sentido hablar de un tiempo de -17 segundos y se descarta la segunda solución.

b) Sustituyendo $t = 3$ en la relación dada:

$$d = 5 \cdot 3^2 + 80 \cdot 3 = 5 \cdot 9 + 240 = 45 + 240 = 285 \quad \Rightarrow \quad d = 285 \text{ m}$$

■ EJEMPLO 21.5

Un lado de un rectángulo mide el doble del otro y su área es 242 m^2 . Determina las dimensiones del rectángulo.

Solución

Sean:

$$x = \text{Lado mayor} \quad y = \text{Lado menor} \quad \text{Área} = xy$$

Se tendrá, de acuerdo con el enunciado:

$$x = 2y \quad xy = 242$$

Sustituyendo el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$y(2y) = 242 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 = 242 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 121$$

Resolviendo:

$$y = \pm \sqrt{121} = \pm 11$$

Cuando $y = 11 \Rightarrow x = 22$. El valor negativo de y se descarta porque se trata de longitudes. Luego, el rectángulo tiene dimensiones de 11 y 22 m.

■ EJEMPLO 21.6

El dibujo de la fig. 21.1 representa un piso rectangular de lados 6 y 5 m. ¿Cuáles serán las dimensiones de la alfombra rectangular si su área es igual a $\frac{1}{3}$ del área del piso?

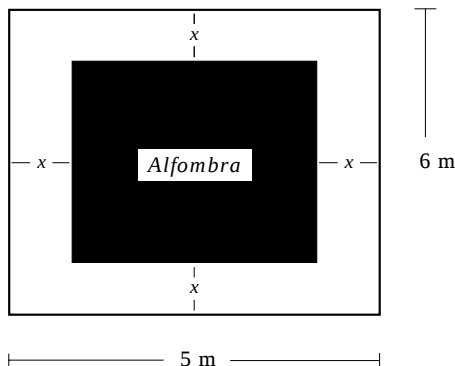


Fig. 21.1 Ejemplo 21.6.

Solución

Supongamos que la alfombra rectangular sea tal que sus lados disten una distancia igual, x , de los lados del piso, tal como se muestra en la fig. 21.1. El área del piso en m^2 está dada por:

$$\text{Área del piso: } 5 \cdot 6 = 30$$

El área de la alfombra es:

$$\text{Área de la alfombra: } (5 - 2x)(6 - 2x)$$

De acuerdo con el enunciado:

$$(5 - 2x)(6 - 2x) = \frac{30}{3} = 10$$

Efectuando operaciones:

$$30 - 10x - 12x + 4x^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 22x + 20 = 0$$

Dividiendo la ecuación por 2:

$$2x^2 - 11x + 10 = 0$$

Resolviendo el discriminante:

$$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 121 - 80 = 41 > 0$$

Luego:

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{41}}{4} = \frac{11 + 6,40}{4} = \frac{17,40}{4} = 4,35$$

$$x_2 = \frac{11 - \sqrt{41}}{4} = \frac{11 - 6,40}{4} = \frac{4,60}{4} = 1,15$$

Si tomamos $x = 4,35$, las dimensiones de la alfombra son:

$$\text{Largo} = 6 - 8,70 = -2,70 < 0$$

$$\text{Ancho} = 5 - 8,70 = -3,70 < 0$$

Como $x = 4,35$ origina valores negativos en las dimensiones de la alfombra, se desecha como solución. Si tomamos $x = 1,15$ m:

$$\text{Largo} = 6 - 2,30 = 3,70$$

$$\text{Ancho} = 5 - 2,30 = 2,70$$

Veamos, para probar el resultado, cuál es el área de la alfombra en m^2 :

$$\text{Área} = (3,70) \cdot (2,70) = 9,99$$

El valor exacto es 10 m^2 , pero debido a las aproximaciones en el cálculo dex, éste resulta igual a $9,99$.

◆ EJERCICIOS

21.1 Determina un número tal que, elevado al cuadrado y sumado con 5 veces el mismo número, resulte 36.

21.2 El cuadrado de un número excede a 4 veces el mismo número en 20. Encuentra el número.

21.3 Tres veces un número, restado del cuadrado del mismo número es igual a -130 . Determinalo.

21.4 La suma de los cuadrados de dos números es igual a 234 y difieren en 12. Determina los números.

21.5 La suma de dos números es 24 y la suma de sus cuadrados es 306. Determinalos.

21.6 La suma de los recíprocos de dos números consecutivos es $\frac{26}{156}$. Determina los dos números.

21.7 El ancho de cierto rectángulo es la mitad de su longitud y el área del rectángulo es 162 m^2 . Determina sus dimensiones.

21.8 El perímetro de un rectángulo es 38 m y su área es 84 m^2 . ¿Cuáles son sus dimensiones?

21.9 El lado de un cuadrado es 3 veces más pequeño que el lado de otro. La suma de las áreas de los 2 cuadrados es 90 cm^2 . Determina el perímetro de cada cuadrado.

22.1 EL TEOREMA DE PITÁGORAS

En el objetivo 1, sección 1.5, se demostró para un triángulo rectángulo como el de la fig. 22.1, la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

A tal relación se le conoce con el nombre de **Teorema de Pitágoras**.

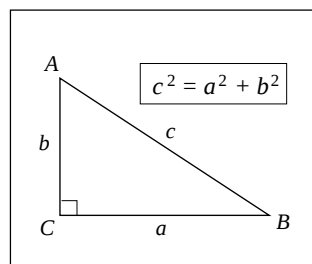


Fig. 22.1 Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo.

A fin de demostrar el Teorema de Pitágoras, considera el cuadrado $MNPQ$ de la fig. 22.2(a). En la fig. 22.2(b) se ha dividido cada uno de los lados del cuadrado en dos segmentos de longitudes a y b . Al unir los 4 puntos de división de los lados, se obtiene otro cuadrado de lado c .

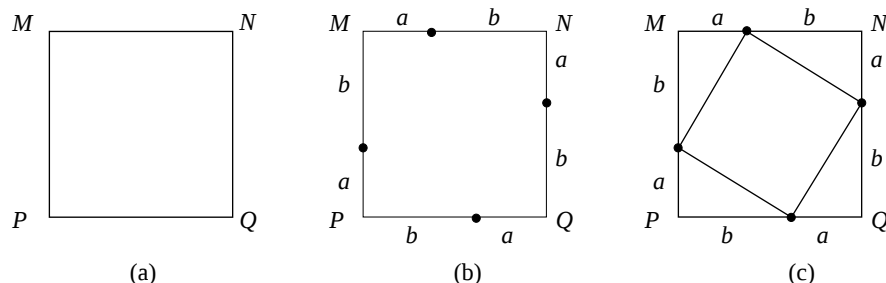


Fig. 22.2 Construcciones geométricas para la demostración del Teorema de Pitágoras.

El área del cuadrado $MNPQ$ es:

$$\text{Área del cuadrado } MNPQ = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (22.1)$$

También podemos ver en la fig. 22.2(c) que el área del cuadrado $MNPQ$ es igual a la suma del área del cuadrado de lado c y el área de los cuatro triángulos rectángulos que se formaron:

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrado } MNPQ &= \text{Área del cuadrado de lado } c + \\ &+ \text{Área de los 4 triángulos formados} \end{aligned}$$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.

Luego:

$$\text{Área del cuadrado } MNPQ: \quad c^2 + 4\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) = c^2 + 2ab \quad (22.2)$$

Igualando (22.1) y (22.2):

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

De donde se obtiene:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

El Teorema de Pitágoras es de gran utilidad en la solución de problemas que envuelven triángulos rectángulos. Los ejemplos que siguen son ilustrativos de la aplicación de dicho teorema:

■ EJEMPLO 22.1

Determina el perímetro de un triángulo rectángulo cuyo catetos miden 28 cm y 21 cm.

Solución

En la fig. 22.3 se muestra el triángulo. Para determinar el perímetro, es necesario encontrar el valor de la hipotenusa. Se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 28^2 + 21^2$$

Luego, el perímetro en cm es:

$$P = 28 + 21 + 35 = 84$$

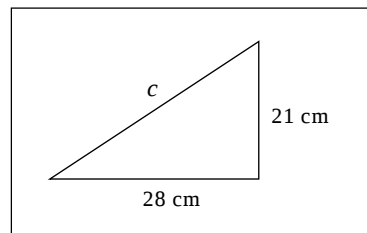


Fig. 22.3 Ejemplo 22.1.

■ EJEMPLO 22.2

Un poste de alumbrado de 6 m de longitud va a ser sostenido por una guaya como se muestra en la fig. 22.4. Uno de los extremos de la guaya está a 1 m de la parte más alta del poste, mientras que el otro extremo está a 4 m del punto donde el poste está enterrado. ¿Qué cantidad de guaya se necesita si se requiere además 1 m adicional para atarla al poste y al anclaje?

Solución

La longitud de la guaya corresponde a la

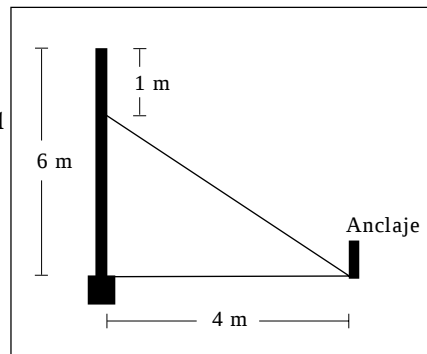


Fig. 22.4 Ejemplo 22.2.

hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $6 - 1 = 5$ m y 4 m. Luego:

$$c^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$$

Si agregamos 1 m necesario para atar la guaya al poste y al anclaje, la longitud en metros será:

$$L = 6,40 + 1 = 7,40$$

■ EJEMPLO 22.3

Determina la longitud de la diagonal del cuadrado de la fig. 22.5 si su perímetro es 80 m.

Solución

Como el perímetro es la suma de las longitudes de los lados:

$$p = 4L = 80 \quad \Rightarrow \quad L = 20 \text{ m}$$

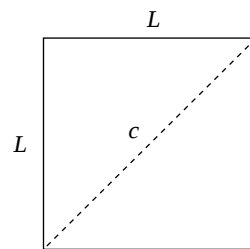


Fig. 22.5 Ejemplo 22.3.

La hipotenusa corresponde a la longitud de la diagonal:

$$c^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 = 2 \cdot (20)^2 = 2 \cdot 400 = 800$$

■ EJEMPLO 22.4

Determina la altura y el área del triángulo equilátero de la fig. 22.6, si el lado del triángulo mide 18 cm.

Solución

La altura de un triángulo equilátero divide al lado en dos partes; luego:

$$h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{324 - 81} = \sqrt{243} = 15,59$$

El área en cm^2 está dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} 18 \cdot 15,59 = 140,31$$

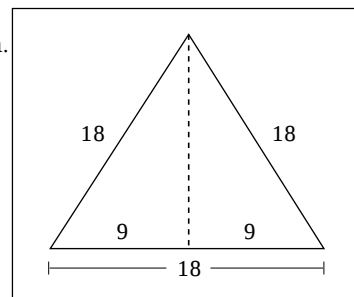


Fig. 22.6 Ejemplo 22.4.

■ EJEMPLO 22.5

Una carretera tiene una pendiente de 2 m de altura por cada 50 m medidos sobre la horizontal (ver fig. 22.7). a) ¿Cuánto se recorre por cada 2 m de altura? b) ¿Cuánto para subir 20 m?

Solución

a) Se trata de determinar la hipotenusa del triángulo rectángulo de la fig. 22.7:

$$c = \sqrt{50^2 + 2^2} = \sqrt{2.500 + 4} = \sqrt{2.504} = 50,04$$

b) Para subir 20 m ($2 \diamond 10$), se necesita haber recorrido, en distancia horizontal, $50 \diamond 10$ = 500 m, y se tiene:

$$c = \sqrt{500^2 + 20^2} = \sqrt{250.000 + 400} = \sqrt{250.400} = 500,40$$

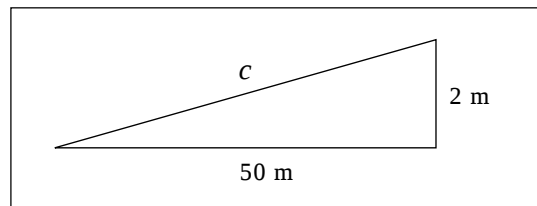


Fig. 22.7 Ejemplo 22.5.

■ EJEMPLO 22.6

Si una cuerda elástica de 0,5 m se estira en su punto medio separándola 2 cm de su posición (fig. 22.8). ¿Qué incremento sufre la longitud total de la cuerda?

Solución

De la figura 22.8, se obtiene el valor L en cm:

$$L = \sqrt{25^2 + 2^2} = \sqrt{625 + 4} = \sqrt{629} = 25,08$$

Como la longitud de las hipotenusas es $2L$:

$$2L = 50,16$$

El incremento en longitud en cm es, por tanto:

$$\Delta L = 50,16 - 50 = 0,16$$

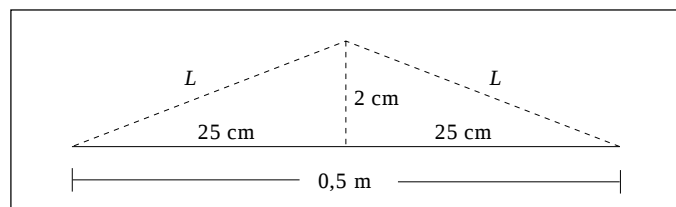


Fig. 22.8 Ejemplo 22.6.

■ EJEMPLO 22.7

Una persona camina 1 km hacia el norte, 2 km hacia el este, 3 km hacia el norte y 4 km hacia el este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

Solución

En la fig. 22.9 las líneas entre A y E indican la trayectoria de la persona ($ABCDE$). La distancia al punto de partida está dada por el segmento AE , que es la hipotenusa del triángulo rectángulo AME . Se tiene:

$$AM = 1 + 3 = 4$$

$$ME = 2 + 4 = 6$$

Luego, la distancia AE en km es:

$$AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7,21$$

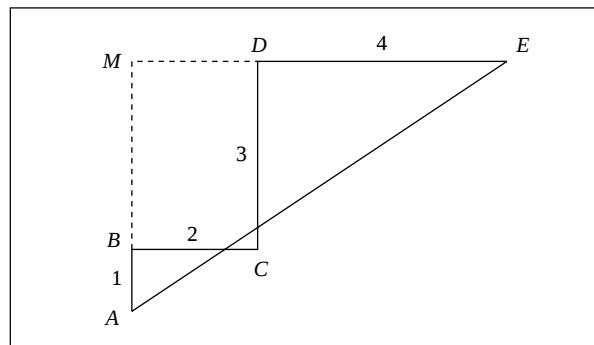


Fig. 22.9 Ejemplo 22.7.

■ EJEMPLO 22.8

En un triángulo rectángulo la longitud del cateto mayor es 1 cm menor que la longitud de la hipotenusa y 7 cm más grande que la medida del otro cateto. a) Calcula las longitudes de los 3 lados. b) Calcula la altura relativa a la hipotenusa. c) Determina el área del triángulo.

Solución

a) Si llamamos x a la longitud de la hipotenusa, podemos escribir:

$$\text{Cateto mayor: } x - 1$$

$$\text{Cateto menor: } (x - 1) - 7 = x - 8$$

En la fig. 22.10 se muestra el triángulo rectángulo resultante. Aplicando el Teorema de

Pitágoras:

$$x^2 = (x-1)^2 + (x-8)^2$$

$$x^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 - 16x + 64$$

$$x^2 - 18x + 65 = 0$$

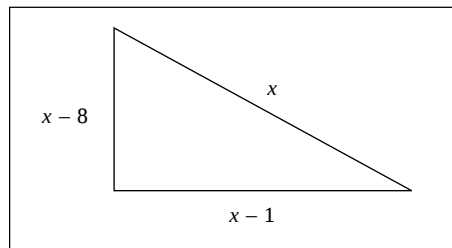


Fig. 22.10 Ejemplo 22.8.

Resolviendo:

$$x_1 = \frac{18 + \sqrt{324 - 260}}{2} = \frac{18 + \sqrt{64}}{2} = 13$$

$$x_2 = \frac{18 - \sqrt{324 - 260}}{2} = \frac{18 - \sqrt{64}}{2} = 5$$

Luego, las longitudes de los 3 lados en cm son:

$$\text{Hipotenusa: } 13 \quad \text{Cateto 1: } x-1 = 13-1 = 12 \quad \text{Cateto 2: } x-8 = 13-8 = 5$$

La segunda solución, $x = 5$, se descarta. ¿Por qué?

b) La altura h sobre la hipotenusa divide al triángulo rectángulo $\triangle ABC$ en dos triángulos rectángulos $\triangle AMC$ y $\triangle BMC$, tal como se indica en la fig. 22.11. Como la distancia AB es igual a 13, tendremos:

$$AM = x \quad MB = 13 - x$$

Para el triángulo $\triangle AMC$, podemos escribir:

$$5^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + h^2 = 25 \quad (1)$$

En el triángulo $\triangle BMC$:

$$12^2 = (13-x)^2 + h^2 \Rightarrow 144 = 169 - 26x + x^2 + h^2$$

$$x^2 + h^2 = 26x - 25 \quad (2)$$

Iguando (1) y (2):

$$26x - 25 = 25 \Rightarrow 26x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{26} \Rightarrow x = 1,92 \text{ cm}$$

De la relación (1) se obtiene el valor de h en cm:

$$h^2 = 25 - x^2 = 25 - 1,922 = 25 - 3,69 = 21,31 \Rightarrow h = \sqrt{21,31} = 4,61$$

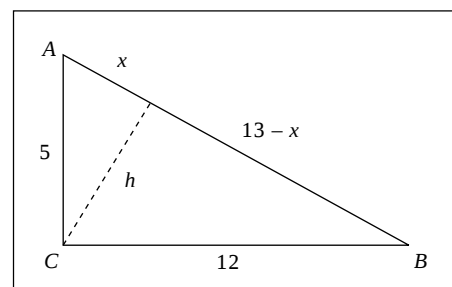


Fig. 22.11 La altura h divide al triángulo original en dos triángulos rectángulos.

♦ EJERCICIOS

22.1 Determina el perímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 13 y 11 cm.

22.2 La hipotenusa y un cateto de un triángulo miden 15 y 10 m respectivamente. Determina el área del triángulo.

22.3 ¿Qué cantidad de guaya se necesita para sostener un poste de alumbrado, si la guaya se ata al extremo del poste a una altura de 12 m y a un anclaje situado a 8 m del pie del poste?

22.4 Una antena de televisión está sostenida en su extremo superior con una guaya que mide 15 m de largo. La guaya se amarra a un punto situado a 7 m de la base de la antena. ¿A qué altura está la guaya atada a la antena?

22.5 Un niño eleva un papagayo utilizando un hilo de 50 m de longitud. Si el papagayo se coloca aproximadamente a 28 m en distancia horizontal del niño (ver fig. 22.12), determina la altura del papagayo sobre la tierra. En la realidad, ¿qué diferencias pueden existir con el problema planteado?

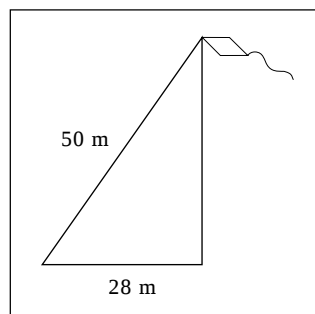


Fig. 22.12 Ejercicio 22.5.

22.8 Un triángulo equilátero tiene 22 cm de lado. Determina la altura y el área del mismo.

22.9 Una carretera tiene una pendiente de 5 m de altura por cada 60 m medidos sobre la horizontal. a) ¿Cuánto se recorre por cada 5 m de altura? b) ¿Cuánto para subir 18 m?

22.10 Una persona camina 1 km hacia el sur, 3 hacia el este, 5 hacia el sur y 2 hacia el este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

22.11 La longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo es 2 unidades mayor que la longitud del otro y el perímetro del triángulo es 30,81 m. Determina a) El área del triángulo. b) La altura relativa a la hipotenusa.

23

EL TEOREMA DE EUCLIDES

23.1 TEOREMA DE EUCLIDES. COMPROBACIÓN GEOMÉTRICA

Considera el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ de la fig. 23.1. De la figura, vemos que:

AB : Cateto BC : Cateto AC : Hipotenusa

AD : Proyección ortogonal del cateto AB sobre la hipotenusa.

Sobre el triángulo $\triangle ABC$ procedemos a realizar las siguientes construcciones geométricas.

a) Sobre el cateto AB dibujamos el cuadrado $APQB$, cuyo lado es igual a la longitud del cateto.

b) Sobre la proyección AD del cateto AB , construimos el rectángulo $ADMN$, de lados iguales a la longitud de AD y a la longitud de la hipotenusa AC . Es decir:

AD : longitud de la proyección ortogonal del cateto AB sobre la hipotenusa AC .

$AN = DM$: longitud de la hipotenusa AC .

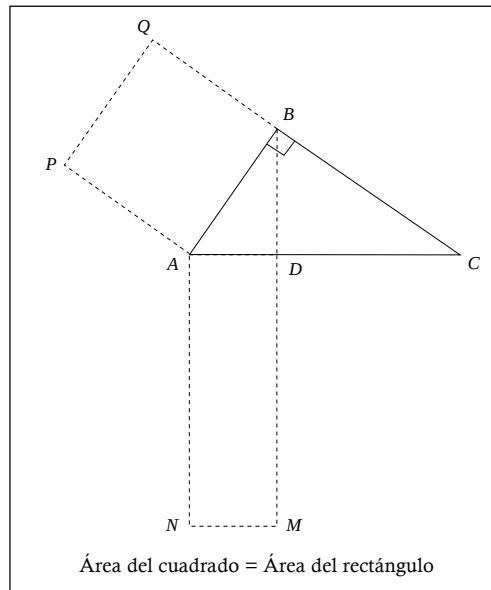


Fig. 23.1 Construcción geométrica para verificar el Teorema de Euclides.

Procedemos ahora a efectuar las siguientes medidas (cm):

Lado del cuadrado: $AB = 2,1$

Lados del rectángulo: $AD = 1,15$ $AN = 3,55$

De acuerdo a las medidas del cuadrado y del rectángulo, podemos calcular sus áreas en cm^2 :

Área del cuadrado: $2^2 = 49$ Área del rectángulo: $1,15 \cdot 3,55 = 4,08$

Una medición más precisa demuestra que el área del cuadrado es exactamente igual al área del rectángulo. Lo anterior es la confirmación geométrica del Teorema de Euclides que establece:

En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre un cateto es igual al área del rectángulo que tiene como lados la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la misma.

23.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE EUCLIDES

Considera el triángulo mostrado en la fig. 23.2. Llamemos x a la proyección ortogonal del cateto AC sobre la hipotenusa AB .

De acuerdo con la fig. 23.2, podemos escribir:

$$AD = x \quad DB = c - x$$

La altura h , trazada desde el extremo C hasta la hipotenusa c , divide al triángulo rectángulo $\triangle ABC$ en dos triángulos rectángulos: $\triangle ADC$ y $\triangle CDB$. Apliquemos el Teorema de Pitágoras a ambos triángulos:

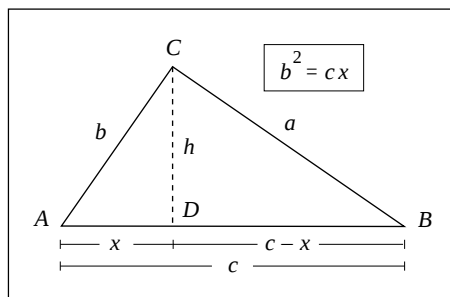


Fig. 23.2 Demostración del Teorema de Euclides.

$$\text{Triángulo } \triangle ADC \Rightarrow b^2 = h^2 + x^2 \quad (1)$$

$$\text{Triángulo } \triangle CDB \Rightarrow a^2 = h^2 + (c - x)^2 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$a^2 + b^2 = h^2 + x^2 + h^2 + (c - x)^2 \quad (3)$$

En el $\triangle ABC$ se cumple:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$c^2 = h^2 + x^2 + h^2 + (c - x)^2 \quad (5)$$

Desarrollando (5):

$$c^2 = 2h^2 + x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \Rightarrow 0 = 2h^2 + 2x^2 - 2cx$$

De la relación anterior, se obtiene:

$$h^2 = cx - x^2 \Rightarrow h^2 = x(c - x) \quad (23.1)$$

Sustituyendo (23.1) en (1):

$$b^2 = cx - x^2 + x^2$$

Finalmente obtenemos:

$$b^2 = cx \quad (23.2)$$

que corresponde al Teorema de Euclides:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma.

Observa que la relación (23.1) es equivalente al enunciado que en la sección 23.1 se dio para el Teorema de Euclides. En efecto, b^2 es el área del cuadrado construido sobre el cateto AC y cx corresponde al área de un rectángulo de lados x (la proyección de AC sobre la hipotenusa) y c (la longitud de la hipotenusa).

23.3 APLICACIONES DEL TEOREMA DE EUCLIDES

Los ejemplos que a continuación se resuelven, ilustran cómo el Teorema de Euclides puede usarse en la práctica.

■ EJEMPLO 23.1

La hipotenusa del triángulo rectángulo de la fig. 23.3 mide 6 cm y el cateto menor mide 3,5 cm. Calcula la longitud del otro cateto, la altura correspondiente a la hipotenusa y las proyecciones de los dos catetos sobre la hipotenusa.

Solución

La longitud del cateto a se calcula usando el Teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{6^2 - 3,5^2} = \sqrt{36 - 12,25} = \sqrt{23,75} = 4,87 \quad \Rightarrow \quad a = 4,87$$

De acuerdo con el Teorema de Euclides, podemos escribir $b^2 = cx$, donde x es la proyección del cateto b sobre la hipotenusa c . Luego:

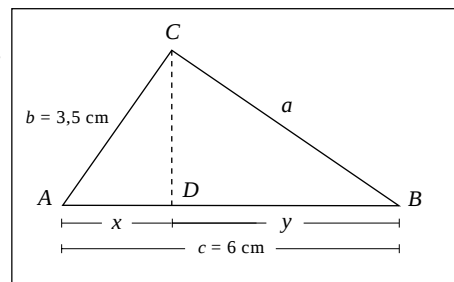


Fig. 23.3 Triángulo rectángulo para el ejemplo 23.1.

$$x = \frac{b^2}{c} = \frac{3,5^2}{6} = \frac{12,25}{6} = 2,04 \quad \Rightarrow \quad x = 2,04 \text{ cm}$$

La proyección del cateto a es:

$$y = 6 - x = 6 - 2,04 = 3,96 \quad \Rightarrow \quad y = 3,96 \text{ cm}$$

De acuerdo con la relación (23.1), la altura h es:

$$h^2 = x(c - x) \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{xy} = \sqrt{2,04 \cdot 3,96} = 2,84 \quad \Rightarrow \quad h = 2,84 \text{ cm}$$

■ EJEMPLO 23.2

Las proyecciones de los catetos del triángulo rectángulo sobre la hipotenusa de la fig. 23.4 miden 4,5 y 12 cm. Calcula la medida de los catetos y la altura correspondiente a la hipotenusa.

Solución

De acuerdo con la relación (23.1):

$$h^2 = xy$$

donde x, y son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Sustituyendo valores:

$$h = \sqrt{4,5 \cdot 12} = \sqrt{54} = 7,35 \quad \Rightarrow \quad h = 7,35$$

La longitud de la hipotenusa en cm es:

$$c = 4,5 + 12 = 16,5$$

De acuerdo con el Teorema de Euclides:

$$b^2 = xc \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{4,5 \cdot 16,5} = \sqrt{74,25} = 8,62 \quad \Rightarrow \quad b = 8,62 \text{ cm}$$

$$a^2 = yc \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{12 \cdot 16,5} = \sqrt{198} = 14,07 \quad \Rightarrow \quad a = 14,07 \text{ cm}$$

■ EJEMPLO 23.3

La altura del triángulo rectángulo de la fig. 23.5 mide 10 cm y un cateto mide 18 cm. Calcula la longitud del otro cateto, la longitud de la hipotenusa y los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa.

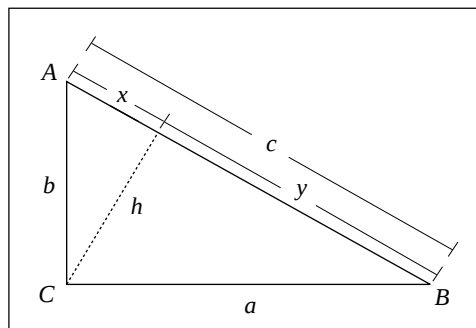


Fig. 23.4 Triángulo rectángulo para el ejemplo 23.2.

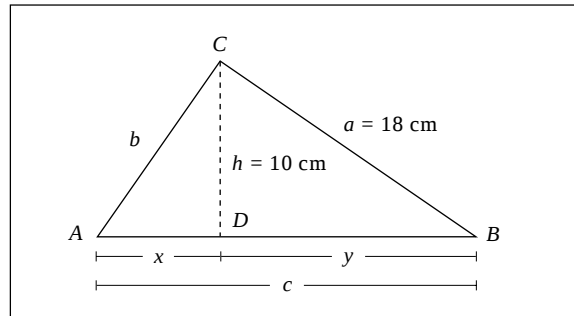


Fig. 23.5 Triángulo rectángulo para el ejemplo 23.3.

Solución

Se conocen: $h = 10 \text{ cm}$ $a = 18 \text{ cm}$

Usemos el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle CBD$:

$$y^2 = a^2 - h^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{18^2 - 10^2} = \sqrt{324 - 100} = \sqrt{224} = 14,97$$

De acuerdo con el Teorema de Euclides:

$$a^2 = cy \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a^2}{y} = \frac{324}{14,97} = 21,64 \quad \Rightarrow \quad c = 21,64$$

Como $x + y = c$:

$$x = c - y = 21,64 - 14,97 = 6,67 \quad \Rightarrow \quad x = 6,67 \text{ cm}$$

Aplicando nuevamente el Teorema de Euclides:

$$b^2 = xc \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{21,64 \cdot 6,67} = \sqrt{144,34} = 12,01 \quad \Rightarrow \quad b = 12,01$$

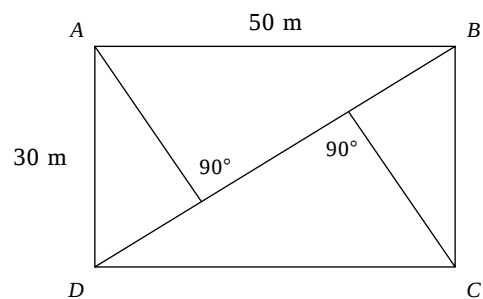
Observa que se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$.

◆ EJERCICIOS

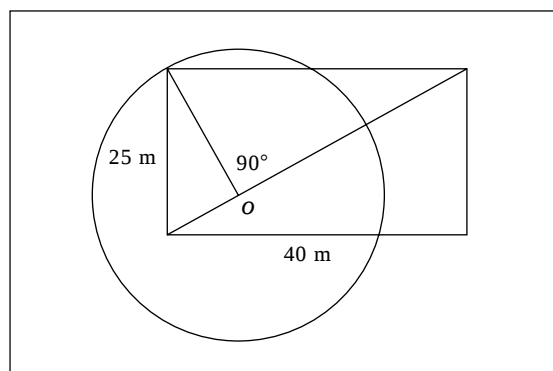
23.1 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y el cateto menor mide 8 cm. Calcula la longitud del otro cateto, la altura correspondiente a la hipotenusa y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

23.2 El terreno rectangular de la fig. 23.6 ha sido dividido en varias partes. Calcula el área correspondiente a cada una de ellas.

23.3 Calcula el área del círculo y la longitud de la circunferencia de centro o en la fig. 23.7.

**Fig. 23.6** Ejercicio 23.2.

23.4 La altura de un triángulo rectángulo es de 20 cm y un cateto mide 30 cm . Calcula la longitud del otro cateto, la longitud de la hipotenusa y los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa.

**Fig. 23.7** Ejercicio 23.3.

24.1 RAZÓN ENTRE DOS SEGMENTOS DE RECTA. SEGMENTOS PROPORCIONALES

En la fig. 24.1 se muestran dos segmentos de rectas de longitudes L_1 y L_2 . Al cociente entre las longitudes de los segmentos se le denomina **razón** de dichos segmentos. Así, si $L_1 = 3$ y $L_2 = 5$, la razón de los segmentos será:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{5}$$

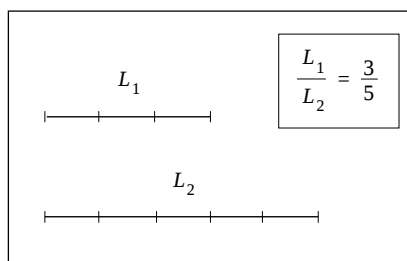


Fig. 24.1 Razón de dos segmentos.

Si $L_1 < L_2$, la razón será menor que 1, mientras que si $L_1 > L_2$, la razón será mayor que 1.

Considera ahora la fig. 24.2. Las rectas paralelas L_1 y L_2 son interceptadas perpendicularmente por las rectas R_1 , R_2 y R_3 en los puntos A, B, C, D, E y F .

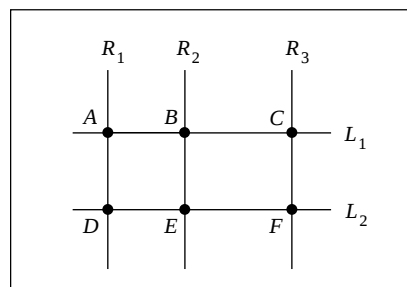


Fig. 24.2 L_1 y L_2 son interceptadas perpendicularmente por las rectas R_1 , R_2 y R_3 .

Las intersecciones con L_1 dan lugar a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, mientras que las intersecciones con L_2 dan lugar a los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$. De la figura, puede observarse que:

$$\overline{AB} = \overline{DE} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = 1 \quad \overline{BC} = \overline{EF} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = 1$$

Es decir, las razones de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ y de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ son iguales. Se tiene entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \quad (24.1)$$

A la relación anterior, donde se igualan dos razones, se le conoce con el nombre

de **proporción**, y los pares de segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, se dicen que son proporcionales. Para la fig. 24.2, por ejemplo, se tienen las siguientes medidas:

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm} \quad \overline{DE} = 1 \text{ cm} \quad \overline{BC} = 1,4 \text{ cm} \quad \overline{EF} = 1,4 \text{ cm}$$

Las razones $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ y $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ son:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1,0}{1,4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{1,0}{1,4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

relaciones que permiten verificar que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

24.2 TEOREMA DE THALES

El Teorema de Thales establece lo siguiente:

Dadas dos rectas convergentes y varias rectas paralelas que las cortan, estas últimas determinan en las primeras segmentos proporcionales.

Para demostrar el Teorema de Thales, considera la fig. 24.3. Las rectas L_1 y L_2 son dos rectas convergentes. Las rectas R_1 , R_2 y R_3 son rectas paralelas que determinan los segmentos:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre L_1

$\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ sobre L_2

Los segmentos punteados AG y BH determinan en la fig. 24.3 los siguientes triángulos semejantes:

$$\triangle ABG \sim \triangle BCH \quad (\text{Criterio AAA})$$

Los segmentos punteados $\overline{DI}$ y $\overline{EJ}$ determinan en la fig. 24.3 los siguientes triángulos semejantes:

$$\triangle DIE \sim \triangle EEF \quad (\text{Criterio AAA})$$

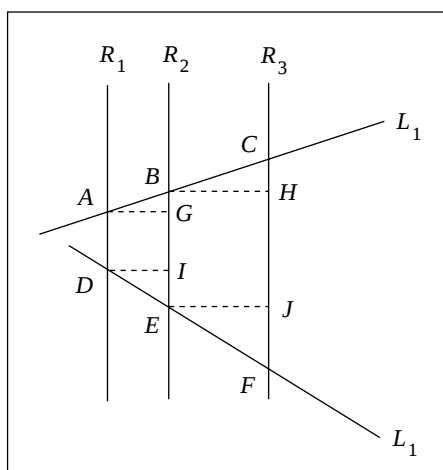


Fig. 24.3 Construcción para demostrar el Teorema de Thales.

En los triángulos semejantes $\triangle ABG$ y $\triangle BCH$ se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{BH}} \quad (24.2)$$

En los triángulos semejantes $\triangle DIE$ y $\triangle EIJ$ se cumple:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EJ}} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{EJ}} \quad (24.3)$$

De la fig. 24.3 se observa también que:

$$\overline{AG} = \overline{DI} \quad \overline{BH} = \overline{EJ}$$

Luego, de (24.2) y (24.3) podemos escribir:

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}} \quad (24.4)$$

que es la expresión que confirma el Teorema de Thales. Los pasos anteriores también puede seguirse para demostrar que:

$$\boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}} \quad \boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}} \quad (24.5)$$

■ EJEMPLO 24.1

Si los segmentos de la fig. 24.4 tienen las longitudes indicadas, ¿serán las rectas R_1 y R_2 paralelas? Justifica tu respuesta.

Solución

Si las rectas R_1 y R_2 son paralelas, determinan segmentos proporcionales sobre las rectas L_1 y L_2 . Veamos si esto es cierto:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{20 - 12,7}{12,7} = 0,57$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{38,7 - 23}{23} = 0,68$$

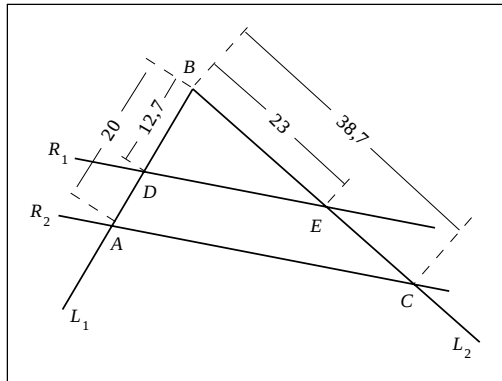


Fig. 24.4 Ejemplo 24.1.

Como $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \neq \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$, las rectas R_1 y R_2 no son paralelas.

■ EJEMPLO 24.2

Tres terrenos se extienden desde una calle A hasta otra calle B, como se muestra en la fig. 24.5. Si la longitud total de los terrenos en la calle A es 120 m, determina la longitud del frente de cada terreno en dicha calle.

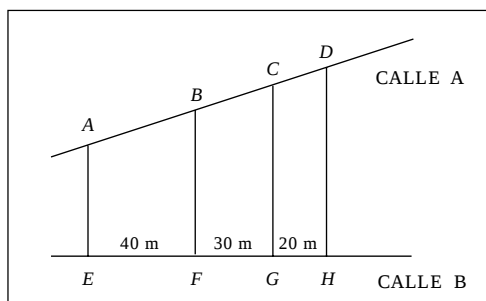


Fig. 24.5 Ejemplo 24.2.

De acuerdo a la relación (24.5):

Como $\overline{AD} = 120$, $\overline{EH} = 90$, $\overline{EF} =$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{\overline{EH}}$$

40:

$$\overline{AB} = \frac{120 \cdot 40}{90} = 53,33$$

Similarmente:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{FG}}{\overline{EH}}$$

Como $\overline{FG} = 30$:

$$\overline{BC} = \frac{120 \cdot 30}{90} = 40$$

También:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{GH}}{\overline{EH}} = \frac{120 \cdot 20}{90} = 26,66$$

Observa que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 53,33 + 40 + 26,66 = 119,99 \approx 120$$

◆ EJERCICIOS

24.1 Los segmentos de la fig. 24.6 tienen las longitudes indicadas. Serán las rectas R_1 y R_2 paralelas? Justifica tu respuesta.

24.2 Un terreno tiene la forma del cuadrilátero mostrado en la fig. 24.7. El lado AB ha sido dividido en 4 partes iguales por rectas paralelas. Determina las longitudes de los segmentos en que queda dividido el lado CD .

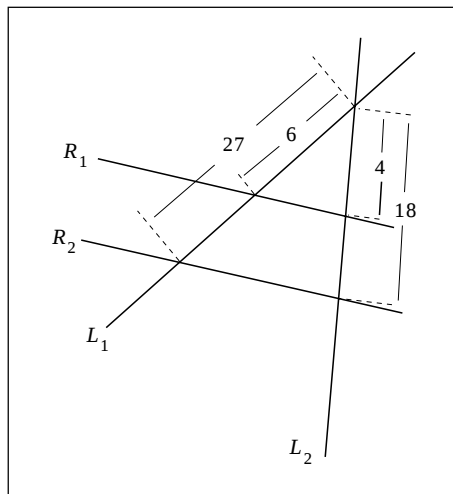


Fig. 24.6 Ejercicio 24.1.

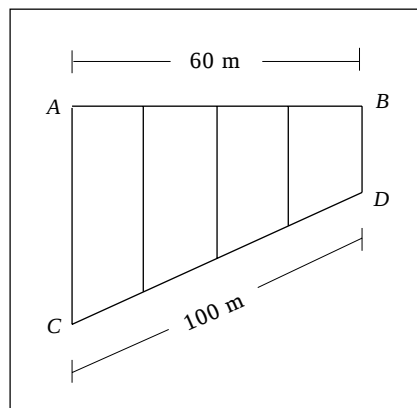


Fig. 24.7 Ejercicio 24.2.

24.3 Una escalera tiene la forma mostrada en la fig. 24.8. Los tramos de la escalera están igualmente espaciados. Para las dimensiones mostradas, determina el largo de la escalera.

24.4 El terreno trapezoidal de la fig. 24.9 se divide como lo indica la línea punteada. Halla el área de cada uno de los terrenos resultantes.

24.5 Halla el área de los triángulos que se forman en la fig. 24.10.

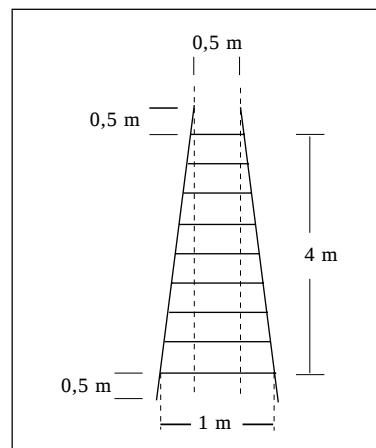


Fig. 24.8 Ejercicio 24.3.

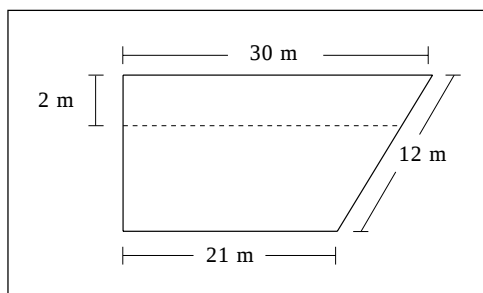


Fig. 24.9 Ejercicio 24.4.

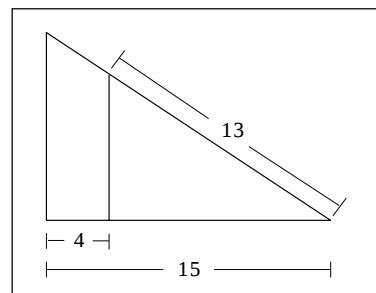


Fig. 24.10 Ejercicio 24.5.

25.1 FIGURAS CONGRUENTES Y FIGURAS SEMEJANTES

En el curso correspondiente a matemática para 8° grado, se estudió el concepto de figuras congruentes:

Dos figuras son congruentes cuando coinciden si se les superpone

Así, las figuras mostradas en la fig. 25.1 son congruentes.

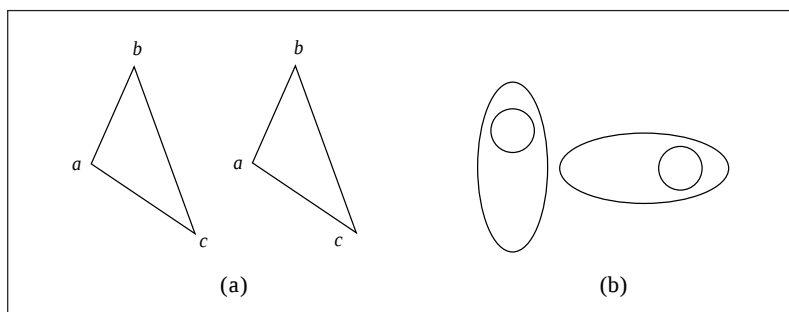


Fig. 25.1 Figuras congruentes.

También establecimos que:

Dos ángulos son congruentes cuando tienen igual medida

En la fig. 25.2 se muestran ángulos congruentes.

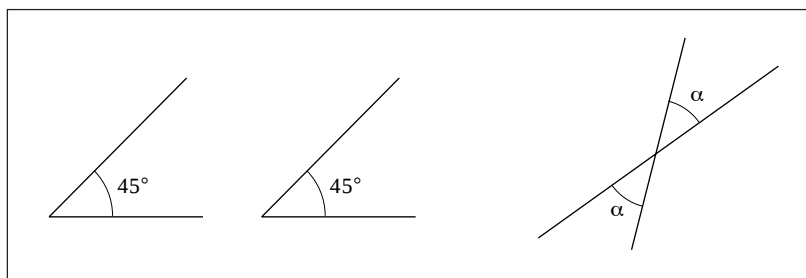


Fig. 25.2 Ángulos congruentes.

El criterio de semejanza envuelve figuras que tienen la misma forma, pero que no necesariamente coinciden al superponerlas. En la fig. 25.3 se muestran figuras semejantes.

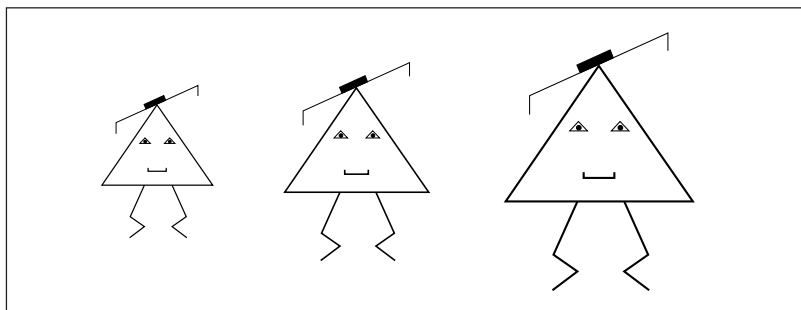


Fig. 25.3 Figuras semejantes.

Como puedes ver, una figura semejante a otra es una versión ampliada o reducida de esta última. La semejanza de figuras es usada ampliamente en la práctica. Los siguientes ejemplos son ilustrativos:

1. Cuando un arquitecto concibe el plano de una vivienda, dibuja una versión reducida de la misma.
2. Cuando un dibujante hace un esquema del cuerpo humano, lo dibuja normalmente a una escala pequeña.
3. Una cámara fotográfica hace una reducción de la figura a la cual se le toma una foto.

25.2 LO QUE CARACTERIZA A FIGURAS GEOMÉTRICAS SEMEJANTES

Dos figuras semejantes cumplen con las siguientes condiciones:

1. Sus ángulos son congruentes.
2. Sus lados correspondientes son proporcionales.

En la fig. 25.4 se muestran dos figuras semejantes. Todos los ángulos formados por la fig. 25.4(a) son congruentes con los de la fig. 25.4(b) y todos los segmentos que conforman la fig. 25.4(b) tienen dos veces la longitud de los de la fig. 25.4(a).

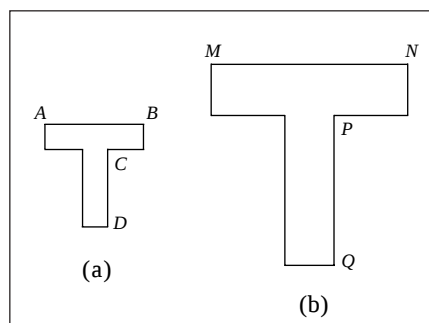
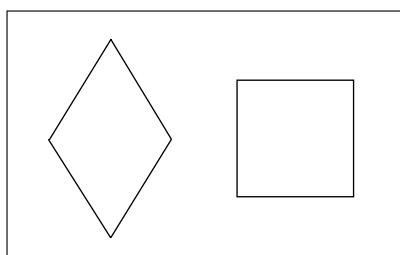


Fig. 25.4 Los ángulos de ambas figuras son congruentes y las longitudes de los segmentos de la fig. 25.4(b) son el doble de las de la fig. 25.4(a).

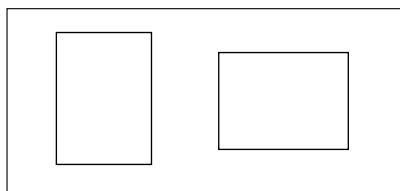
Es decir, los segmentos de la fig. 25.4(b) son proporcionales a los de la fig. 25.4(a). Por ejemplo:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

Dos figuras congruentes tienen que cumplir simultáneamente con las condiciones ya descritas. Las figuras siguientes no son congruentes:



Aunque el rombo y el cuadrado tienen lados de igual longitud, sus ángulos internos no son congruentes y por tanto las dos figuras no son semejantes.



Los dos rectángulos tienen los mismos ángulos internos, pero sus lados tienen distintas longitudes y por tanto las figuras no son semejantes.

25.3 CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Al igual que en el caso de triángulos congruentes, existen ciertos criterios que nos permiten determinar rápidamente si dos triángulos son semejantes o no. Para indicar la semejanza de triángulos, se utiliza el símbolo $\sim$. Así, si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ son semejantes, se escribe:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

A continuación, estudiamos 3 criterios de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

En la fig. 25.5 se muestran los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$. De acuerdo con el criterio anterior, para que dichos triángulos sean semejantes se debe cumplir:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \qquad \frac{b}{c} = \frac{n}{p} \qquad \frac{c}{a} = \frac{p}{m} \qquad (25.1)$$

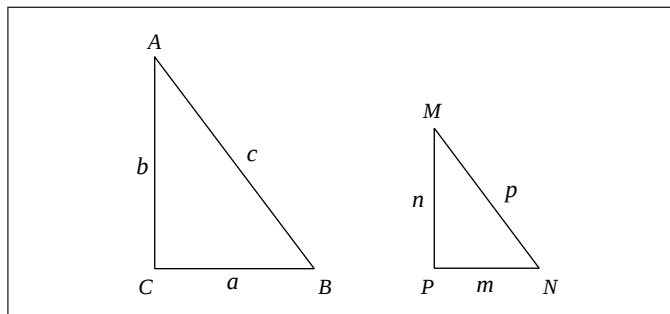


Fig. 25.5 Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales

Las tres relaciones pueden expresarse también de la forma:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \quad (25.2)$$

En la fig. 25.5 se tiene:

$$a = 2,1 \quad b = 2,8 \quad c = 3,5 \quad m = 1,38 \quad n = 1,83 \quad p = 2,29$$

Luego:

$$\frac{a}{b} = \frac{2,1}{2,8} = 0,75 \quad \frac{m}{n} = \frac{1,38}{1,83} = 0,75 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2,8}{3,5} = 0,8 \quad \frac{n}{p} = \frac{1,83}{2,29} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c} = \frac{n}{p}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3,5}{2,1} = 1,7 \quad \frac{p}{m} = \frac{2,29}{1,38} = 1,7 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{p}{m}$$

Entonces, podemos escribir: $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

■ EJEMPLO 25.1

Para medir la altura de un edificio, se utiliza un listón de altura igual a 3 m (Ver fig. 25.6). El listón arroja una sombra de 4 m sobre el suelo, mientras que el edificio proyecta una sombra de 20 m sobre el suelo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Solución

Como los rayos solares se propagan en línea recta, los triángulos que se forman tienen

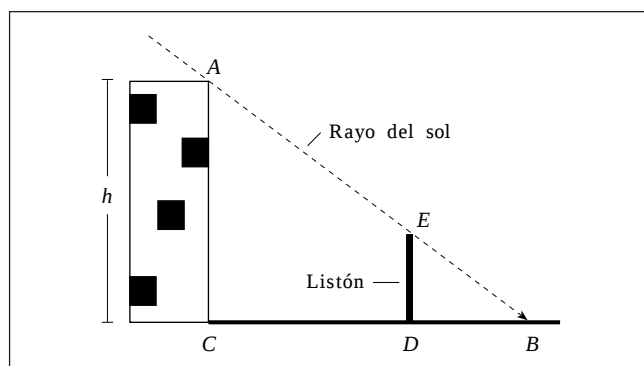


Fig. 25.6 Medición de la altura de un edificio mediante triángulos semejantes, usando la proyección del sol.

sus lados correspondientes proporcionales. Es decir:

$$\triangle ABC \sim \triangle EBD$$

De acuerdo con el problema:

$$\text{Altura del listón} = \overline{ED} = 3 \text{ m}$$

$$\text{Sombra del edificio} = \overline{CB} = 20 \text{ m}$$

$$\text{Sombra del listón} = \overline{DB} = 4 \text{ m}$$

Como los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle EBD$ son semejantes, se puede escribir:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} \quad \frac{h}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{ED}}{\overline{DB}}$$

Sustituyendo valores, se obtiene la altura h del edificio:

$$h = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15$$

Un segundo criterio de semejanza de triángulos establece:

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos correspondientes congruentes.

Considera el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ de la fig. 25.7 y dibujemos la perpendicular desde el vértice C hasta la hipotenusa. Se forman así dos triángulos congruentes: el triángulo $\triangle ABC$ y el triángulo $\triangle ADC$.

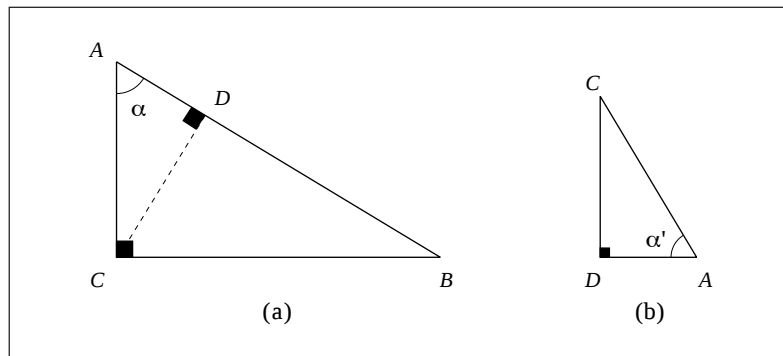


Fig. 25.7 Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son triángulos semejantes.

El triángulo $\triangle ADC$ se muestra aislado en la fig. 25.7(b). Observa lo siguiente:

1. En ambos triángulos, α y α' son los ángulos entre el cateto más corto y la hipotenusa. Es decir, α y α' son ángulos correspondientes. Como ambos ángulos tienen la misma medida, $\alpha \cong \alpha'$.
2. Los dos triángulos tienen un ángulo recto formado por los catetos. Como este ángulo es de 90° , ambos ángulos son ángulos correspondientes y congruentes.

Puede, por lo tanto, escribirse: $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

■ EJEMPLO 25.2

Con el fin de medir aproximadamente el ancho de un río, se realizan las mediciones indicadas en la fig. 25.8. En base a las mismas, determina el valor del ancho del río.

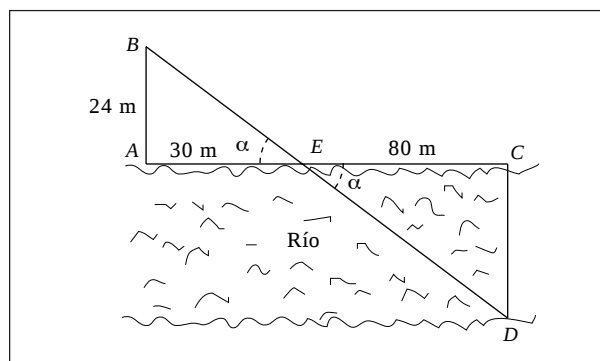


Fig. 25.8 Mediciones para determinar el ancho de un río.

Solución

Los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son semejantes por tener dos ángulos congruentes, α , y el ángulo recto. Podemos entonces escribir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{EC}}{\overline{AE}} = \frac{24 \cdot 80}{30} = 64$$

Luego, el ancho del río, correspondiente a la distancia CD , es de 64 m.

El tercer criterio de congruencia de triángulos establece lo siguiente:

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente y los lados que lo determinan proporcionales.

Así, los triángulos mostrados en la fig. 25.9 son semejantes porque:

$$\alpha = \alpha' \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}} = \frac{5}{4} = \frac{2,5}{2}$$

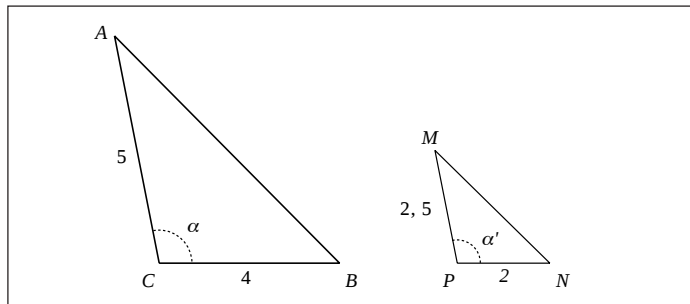


Fig. 25.9 Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ son semejantes.

■ EJEMPLO 25.3

Para medir la altura de un edificio, se coloca encima una vara que mide 3,4 m y se toman dos puntos de medida, A y B , de manera que $\alpha \cong \alpha'$. Determina la altura del edificio mostrado en la fig. 25.10.

Solución

Los triángulos $\triangle AEC$ y $\triangle BDC$ son semejantes y, por tanto, podemos escribir:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{h + 3,4}{h}$$

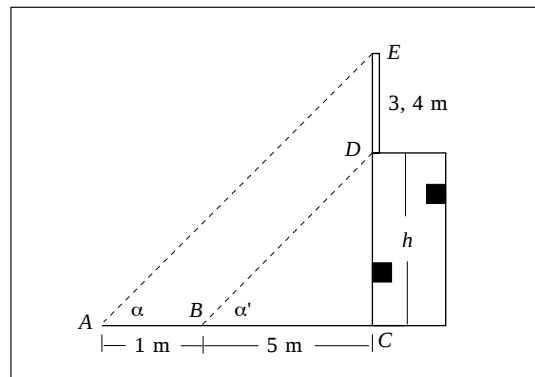


Fig. 25.10 Ejemplo 25.3.

Como $\overline{AC} = 6\text{m}$ y $\overline{BC} = 5\text{m}$, se tiene:

$$\frac{6}{5} = \frac{h + 3,4}{h} \Rightarrow 6h = 5h + 17 \Rightarrow h = 17\text{ m}$$

■ EJEMPLO 25.4

Calcula el área de la parte sombreada de la fig. 25.11(a).

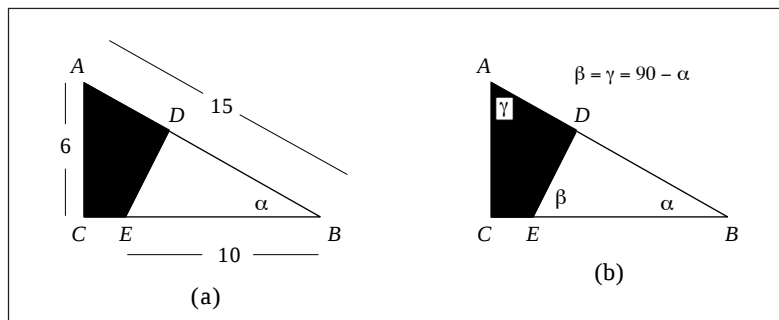


Fig. 25.11 Calcula el área de la parte sombreada. Ejemplo 25.4.

Solución

El área de la región sombreada es igual a la diferencia de las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle EBD$. El triángulo $\triangle EBD$ es semejante con el triángulo $\triangle ABC$ por las siguientes razones:

- El ángulo α es común a ambos triángulos.
- Los ángulos β y γ son congruentes e iguales a $90 - \alpha$.

Calculemos primero el cateto $\overline{BC}$ del triángulo $\triangle ABC$. Se tiene, usando el Teorema de

Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{15^2 - 6^2} = \sqrt{225 - 36} = \sqrt{189} = 13,74$$

El área del triángulo $\triangle ABC$ es:

$$\text{Área del triángulo } \triangle ABC = = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 13,74 \cdot 6 = 41,22$$

Por semejanza de triángulos, podemos escribir:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{6 \cdot 10}{15} = 4$$

Es decir, la altura del triángulo $\triangle EBD$ es igual a 4. Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle EBD$:

$$\overline{DB}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{DE}^2 \Rightarrow \overline{DB} = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 9,16$$

Como DB es la base del triángulo $\triangle EBD$, se tiene:

$$\text{Área del triángulo } \triangle EBD = \frac{1}{2} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot 9,16 \cdot 4 = 18,32$$

Entonces, el área de la parte sombreada es: $41,22 - 18,32 = 22,90$

◆ EJERCICIOS

25.1 Para medir la altura de un árbol, se utiliza un listón de 3,2 m que arroja una sombra de 4,3 m sobre el suelo, mientras que el árbol (ver fig. 25.12) proyecta una sombra de 16,5 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

25.2 Con el fin de medir aproximadamente el ancho de un río, se realizan las mediciones mostradas en la fig. 25.13. Determina el ancho del río.

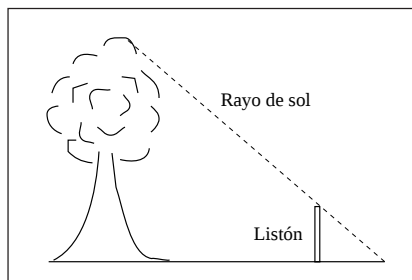


Fig. 25.12 Ejercicio 25.1.

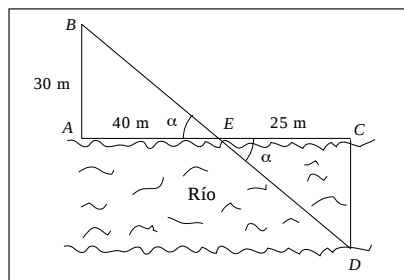


Fig. 25.13 Ejercicio 25.2.

25.3 Para medir la altura de un edificio, se coloca en la azotea del mismo un listón que mide 2,7 m. Las proyecciones de las sombras del edificio y el listón son 11,6 m y 13 m, respectivamente. Determina la altura del edificio (ver fig. 25.14).

25.4 Determina el área sombreada en la fig. 25.15.

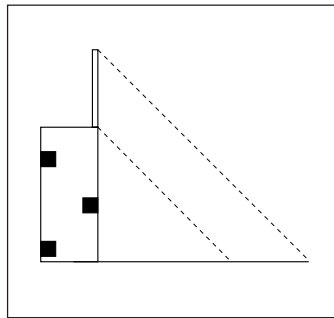


Fig. 25.14 Ejercicio 25.3.

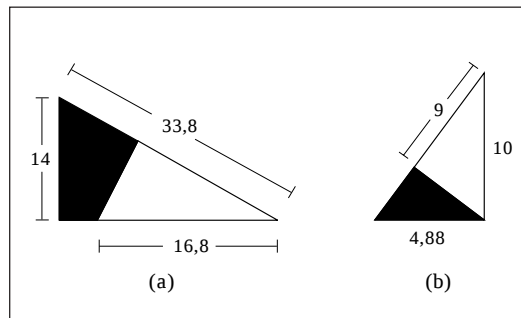


Fig. 25.15 Ejercicio 25.4.

25.5 Calcula la superficie sombreada en la fig. 25.16.

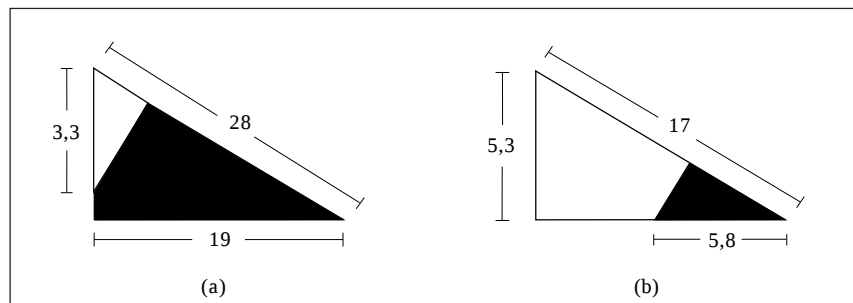


Fig. 25.16 Ejercicio 25.5.

25.6 Determina, efectuando las mediciones apropiadas, si los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle CDF$, $\triangle CDB$ y $\triangle FDB$ de la fig. 25.17 son semejantes.

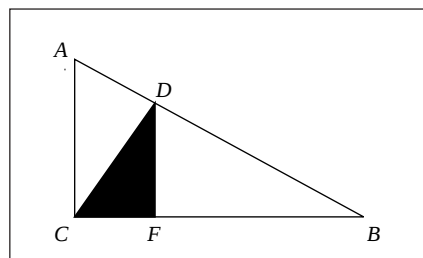


Fig. 25.17 Ejercicio 25.6.

26.1 MEDIA ARITMÉTICA DE DATOS NO ORGANIZADOS. MODA DE UNA DISTRIBUCIÓN.

Dado un conjunto de n números $x_1, x_2, \dots, x_n$, la media aritmética o promedio de los mismos, $\bar{x}$, se define como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (26.1)$$

La suma de los n números puede expresarse como:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{n=1}^n x_n \quad (26.2)$$

donde el símbolo $\sum x_i$ significa la suma de todos los números. La relación (27.1) nos queda entonces:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^n x_n}{n} \quad (26.3)$$

En un conjunto de números, **la moda** es el valor que se presenta con mayor frecuencia. Un conjunto de datos puede o no tener una moda, y en caso de que ésta exista, puede no ser única. Cuando en un conjunto de datos hay una sola moda, se dice que el conjunto es **unimodal**. Si hay dos modas, el conjunto es **bimodal**.

■ EJEMPLO 26.1

Determina la media aritmética de los números 14, 16, 18, 10, 12 y 15.

Solución

Como hay seis números, $n = 6$. De acuerdo con la relación 26.1, se tendrá:

$$\bar{x} = \frac{14 + 16 + 18 + 10 + 12 + 15}{6} = \frac{85}{6} = 14,16$$

■ EJEMPLO 26.2

Las notas obtenidas por Ernesto en el 7° grado fueron: 16, 14, 16, 15, 20, 13, 15, 18, 19 y 15. Determina su promedio ¿Cuál es la moda?

Solución

Usando la relación (26.1) con $n = 10$:

$$\bar{x} = \frac{16 + 14 + 16 + 15 + 20 + 13 + 15 + 18 + 19 + 15}{10} = \frac{161}{10} = 16,10$$

La nota que tiene lugar con mayor frecuencia es 15 y por tanto la moda es 15.

◆ EJEMPLO 26.3

Para ingresar a una Universidad, se exige un promedio de notas igual o mayor que 16,8 puntos en los cinco años anteriores al ingreso. Héctor obtuvo los siguientes promedios en los cuatro años anteriores: 15,3; 16,7; 18,1 y 16,2. Si está cursando el quinto año, ¿qué promedio debe obtener para poder ingresar a la Universidad?

Solución

El promedio de notas necesario para ingresar a la Universidad es $\bar{x} = 16,8$. Si llamamos

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ y $\bar{x}_5$ a los promedios obtenidos en los cinco años, podemos escribir:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5}{5}$$

De acuerdo con el enunciado del problema, conocemos:

$$\bar{x}_1 = 15,3 \quad \bar{x}_2 = 16,7 \quad \bar{x}_3 = 18,1 \quad \bar{x}_4 = 16,2$$

Sustituyendo valores:

$$16,8 = \frac{15,3 + 16,7 + 18,1 + 16,2 + \bar{x}_5}{5}$$

donde $\bar{x}_5$ es el promedio mínimo que Héctor debe obtener en el quinto año para acumular un promedio total igual a 16,8. De la relación anterior, debemos despejar $\bar{x}_5$:

$$16,8 = \frac{66,3 + \bar{x}_5}{5} \Rightarrow 16,8 \cdot 5 = 66,3 + \bar{x}_5 \Rightarrow \bar{x}_5 = 84,0 - 66,3 \Rightarrow \bar{x}_5 = 17,7$$

Es decir, Héctor debe obtener un promedio mayor o igual que 17,7 puntos para poder ingresar a la universidad.

■ EJEMPLO 26.4

En los conjuntos de números dados, determina la moda:

- a) {17; 18; 19; 4; 20; 25}
- b) {14; 13; 8; 17; 15; 14; 12; 14; 14; 17}
- c) {5; 4; 3,2; 3; 7; 5; 5; 3,2; 7; 3,2}

Solución

- a) El conjunto dado no tiene moda, ya que ningún valor se repite.
- b) El número 14 es el que más se repite y es, por tanto, la moda. Como hay una sola moda, el conjunto es unimodal. Observa que aunque el número 17 se repite, la frecuencia de repetición es menor que la de 14.
- c) Los números 5 y 3,2 se repiten cada uno 3 veces. Luego hay dos modas: 5 y 3,2. El conjunto es, por tanto, bimodal.

26.2 FRECUENCIA ABSOLUTA. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

Considera la tabla de la fig. 26.1, donde se presentan las alturas en metros de los 45 estudiantes de un salón de clases.

1,56	1,58	1,57	1,58	1,58	1,59	1,62	1,59	1,57
1,60	1,57	1,59	1,61	1,60	1,61	1,57	1,58	1,58
1,60	1,63	1,58	1,57	1,56	1,58	1,57	1,60	1,61
1,56	1,59	1,57	1,58	1,62	1,62	1,58	1,57	1,60
1,62	1,58	1,56	1,57	1,59	1,60	1,59	1,62	1,57

Fig. 26.1 Altura en metros de los 45 estudiantes de un salón de clases.

En la tabla anterior, los datos correspondientes a las alturas de los estudiantes no están organizados siguiendo cierto orden numérico. Por tal motivo, la fig. 26.1 corresponde a una *tabla de datos no organizados*.

A fin de facilitar el análisis estadístico de los datos, es conveniente ordenarlos en orden creciente o decreciente de magnitud. Similarmente, es conveniente especificar el número de veces que se repite un determinado dato. A los datos así ordenados se les denomina *datos organizados*.

*Al número de veces que se repite un dato se le denomina
frecuencia absoluta, f .*

Si ordenamos en orden creciente los datos de la fig. 26.1, obtenemos la tabla de la fig. 26.2. Allí, cada uno de los datos aparece con la frecuencia que le corresponde. A dicha tabla, con los datos organizados y mostrando la frecuencia de cada uno de ellos, se le conoce con el nombre de *distribución de frecuencias*.

Altura (m)	Frecuencia absoluta (f)
1,56	4
1,57	10
1,58	10
1,59	6
1,60	6
1,61	3
1,62	5
1,63	1
Total: 45	

Fig. 26.2 Distribución de frecuencias para los datos de la fig. 26.1.

26.3 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS PARA DATOS AGRUPADOS

Cuando se tiene una gran cantidad de números, el proceso de sacar conclusiones sobre los mismos se hace lento y tedioso. Por esta razón, los datos son "comprimidos" de forma tal que su análisis se facilite.

Observa los datos de la fig. 26.3. Los mismos corresponden a las notas obtenidas por 100 alumnos del curso de Inglés de 7^o grado en el liceo "Cruz Salmerón Acosta", de Cumaná.

6	20	8	19	9	17	11	16	10	15
12	14	13	15	14	16	14	16	13	17
16	13	16	6	13	14	12	12	17	15
10	16	12	16	12	6	14	15	13	14
13	12	15	14	10	13	12	16	10	16
17	13	14	8	13	11	16	13	15	12
12	13	10	13	18	14	13	9	17	18
14	15	14	12	14	12	14	18	12	14
13	12	19	13	15	20	12	13	19	17
11	15	14	12	13	14	14	14	15	12

Fig. 26.3 Notas obtenidas por los alumnos del 7^o grado de Inglés del liceo "Cruz Salmerón Acosta", de Cumaná.

En la fig. 26.4 se muestra la distribución de frecuencias y la frecuencia acumulada f_a . A fin de "comprimir" los datos, éstos son divididos en *intervalos de clases* o simplemente **clases**, que permiten la visualización y el análisis de los mismos de manera más fácil. En la fig. 26.5 se han agrupado los datos en 5 intervalos de clase de manera que:

Primera clase: 6 - 8
 Segunda Clase: 9 - 11
 Tercera clase: 12 - 14
 Cuarta clase: 15 - 17
 Quinta clase: 18 - 20

Es decir, la primera clase cubre las notas comprendidas entre 6 y 8 puntos, la segunda clase las notas entre 9 y 11 y así sucesivamente. Como podrás notar, todos los intervalos de clase de la fig. 26.5 son iguales. Esto no tiene que ser necesariamente así, pero hay algunas ventajas de que así sea. En este libro usaremos sólo intervalos de clases iguales. Un número adecuado de intervalos de clases para distribuciones agrupadas puede estar entre 7 y 15.

Notas	f	f_a
6	3	3
7	0	3
8	2	5
9	2	7
10	5	12
11	3	15
12	16	31
13	17	48
14	18	66
15	10	76
16	10	86
17	6	92
18	3	95
19	3	98
20	2	100

Fig. 26.4 Distribución de frecuencia para la tabla de la fig. 26.3.

Notas	f	f_a
6 - 8	5	5
9 - 11	10	15
12 - 14	51	66
15 - 17	26	92
18 - 20	8	100

Fig. 26.5 Agrupación de los datos de la fig. 26.4 en intervalos de clase.

A continuación discutiremos algunas definiciones relativas a los intervalos de clase.

a. Límite de clase: Son los números extremos de cada intervalo de clase. Para el caso que estamos estudiando, tendremos:

	Límites de clase
Primera clase: 6 - 8	6, 8
Segunda clase: 9 - 11	9, 11
Tercera clase: 12 - 14	12, 14
Cuarta clase: 15 - 17	15, 17
Quinta clase: 18 - 20	18, 20

b. Límites inferior y superior de una clase: Se refiere al número menor y número mayor en los distintos intervalos de clase:

	Límite Inferior	Límite Superior
Primera clase:	6 - 8	8
Segunda clase:	9 - 11	11
Tercera clase :	12 - 14	14
Cuarta clase:	15 - 17	17
Quinta clase:	18 - 20	20

c. Longitud o amplitud de un intervalo de clase: Es la diferencia entre los límites superior e inferior de un intervalo de clase. Si esta diferencia es la misma para todos los intervalos de clase, éstos tienen la misma longitud. Este es el caso para todos los intervalos del ejemplo que estamos estudiando:

	Longitud del intervalo
Primera clase: 6 - 8	2
Segunda clase: 9 - 11	2
Tercera clase: 12 - 14	2
Cuarta clase: 15 - 17	2
Quinta clase: 18 - 20	2

d. Punto medio de una clase: Corresponde a la semisuma de los límites inferior y superior de la clase:

	Punto medio
Primera clase: 6 - 8	$\frac{6 + 8}{2} = \frac{14}{2} = 7$
Segunda clase: 9 - 11	$\frac{9 + 11}{2} = \frac{20}{2} = 10$
Tercera clase: 12 - 14	$\frac{12 + 14}{2} = \frac{26}{2} = 13$
Cuarta clase: 15 - 17	$\frac{15 + 17}{2} = \frac{22}{2} = 11$
Quinta clase: 18 - 20	$\frac{18 + 20}{2} = \frac{38}{2} = 19$

■ EJEMPLO 26.5

Durante el período P de enero y 30 de abril de 1976, 24 fincas del país sembraron maní, encontrándose que la cantidad de hectáreas sembradas se distribuyó de acuerdo con la tabla de la fig. 26.6. Construye una tabla de distribución de frecuencias con varios intervalos de clase. Interpreta los resultados.

1,5	2,5	2,0	10,0	3,5	5,0
2,5	4,0	4,0	10,0	8,0	3,0
10	2,0	3,5	2,5	3,0	5,0
3,5	10,0	4,0	8,0	10,0	5,0

Fig. 26.6 Cantidad de hectáreas sembradas de maní en 24 fincas del país entre enero y abril de 1976. Ejemplo 26.5.

Solución

Primero ordenaremos los datos en forma creciente anotando la frecuencia de los mismos. Esto se muestra en la fig. 26.7.

Una ordenación de los datos en 4 intervalos de clase se muestra en la fig. 26.8. Cada intervalo tiene una longitud de 2,99. Debes tener en cuenta que los intervalos de clase seleccionados son, en cierta manera arbitrarios y por lo tanto, tú puedes elegir otros intervalos diferentes a los de la fig. 26.8. De la tabla de la fig. 26.8 puede deducirse lo siguiente :

- 6 fincas sembraron entre 0 y 2,99 hectáreas de maní.
- 11 fincas sembraron entre 3 y 5,99 hectáreas de maní.
- 2 fincas sembraron entre 6 y 8,99 hectáreas de maní.
- 5 fincas sembraron entre 9 y 11,99 hectáreas de maní.

Hectáreas	f
1,5	1
2,0	2
2,5	3
3,0	2
3,5	3
4,0	3
5,0	3
8,0	2
10,00	5

Fig. 26.7 Ordenación de los datos de la fig. 26.6 en forma creciente.

Hectáreas	f
0 - 2,99	6
3 - 5,99	11
6 - 8,99	2
9 - 11,99	5

Fig. 26.8 Agrupación de los datos de la fig. 26.7 en 4 intervalos de clase.

26.4 MEDIA ARITMÉTICA Y MODA DE DATOS ORGANIZADOS

Para calcular la media aritmética de datos organizados en intervalos de clase, se utiliza la relación:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_i x_i}{f_1 + f_2 + \dots + f_i} = \frac{\sum_{i=1}^i f_i x_i}{\sum_{i=1}^i f_i} \quad (26.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1, f_2, \dots, f_i &= \text{frecuencias de los intervalos de clase.} \\ x_1, x_2, \dots, x_i &= \text{puntos medios de los intervalos de clase.} \end{aligned}$$

Como la suma $\sum f_i = n$, la relación 26.4 nos queda como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^i f_i x_i}{n} \quad (26.5)$$

donde n es el número total de datos en la distribución.

Cuando los datos están organizados en intervalos de clase no se habla de moda, sino de **clase modal**.

La clase modal en una distribución organizada en intervalos de clase es aquella que aparece con mayor frecuencia.

■ EJEMPLO 26.6

En un examen de Matemática, las notas se distribuyeron de acuerdo con la tabla de la fig. 26.9. a) Calcula la media aritmética. b) ¿Cuál es la clase modal?

Solución

a) A partir de los datos de la fig. 26.9, construimos la tabla de la fig. 26.10. Aplicando la relación 26.4:

Notas	f
9 – 115	
12 – 1414	
15 – 179	
18 – 202	

Fig. 26.9 Ejemplo 26.6.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 f_i x_i}{n} = \frac{5 \cdot 10 + 13 \cdot 14 + 16 \cdot 9 + 2 \cdot 19}{4} = \frac{414}{4} = 103,5$$

b) La clase modal corresponde a la clase (12 – 14) que es la que aparece con mayor frecuencia.

Notas	f	x_i	$f_i x_i$
9 – 11	5	10	50
12 – 14	14	13	182
15 – 17	9	16	144
18 – 20	2	19	38
$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 414$	

Fig. 26.10 Cálculo de $\sum f_i$ y $\sum f_i x_i$ para el ejemplo 26.6.

■ EJEMPLO 26.7

La altura en cm de los estudiantes de un salón de clases se muestra en la fig. 26.11 a) A partir de los datos, determina la altura promedio de los estudiantes. b) Organiza los datos en intervalos de clase de longitud igual a 2. c) A partir de los datos organizados en intervalos de clase, determina nuevamente la altura promedio. d) ¿Cuál es la clase modal?

160	164	165	161	166	162	164	163	169	168
167	161	167	158	165	168	164	168	171	166
164	167	166	168	172	161	162	169	165	170
167	168	170	173	168	171	167	172	175	169

Fig. 26.11 Ejemplo 26.7: distribución de la altura de los estudiantes de un salón de clases.

Solución

a) De acuerdo con la relación (26.3), la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{6.661}{40} = 166,53$$

b) Las alturas mínima y máxima son 158 cm y 175 cm respectivamente. Como la longitud de cada intervalo es igual a 2, podemos construir la tabla de la fig. 26.12.

c) De acuerdo con la relación (26.4), podemos escribir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{n} = \frac{6.666}{40} = 166,65$$

Altura	f_i	x_i	$f_i x_i$
158 – 160	2	159	318
161 – 163	6	162	972
164 – 166	10	165	1.650
167 – 169	14	168	2.352
170 – 172	6	171	1.026
173 – 175	2	174	348
$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i x_i = 6.666$	

Fig. 26.12 Organización de los datos en intervalos de clase para el ejemplo 26.7.

d) La clase modal es (167 – 169) que es la que presenta mayor frecuencia.

◆ EJERCICIOS

26.1 La fig. 26.13 presenta las notas obtenidas por 20 estudiantes de Castellano. a) Organiza los datos en intervalos de clase igual a 2b) A partir de los datos organizados en intervalos de clase, determina la nota promedio. c) ¿Cuál es la clase modal?

9	12	13	13	15	12	14	10	14	18
13	10	17	13	11	16	14	20	12	16

Fig. 26.13 Notas de un examen de Castellano. Ejercicio 26.2.

26.2 Las inasistencias a clases de un grupo de 48 estudiantes durante el año escolar 1986-1987 se presentan en la tabla de la fig. 26.14. Elabora: a) Una tabla de frecuencias (absoluta y acumulada). b) Una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos de clase. c) Dibuja el histograma y el polígono de frecuencias de los datosd) Interpreta la información del histograma.

2	9	3	4	5	7	8	10	8	10
4	10	8	10	4	10	2	4	8	4
5	7	4	1	4	9	10	10	4	10
10	0	8	10	8	2	4	10	6	8
6	6	2	8	0	8	6	4		

Fig. 26.14 Ejercicio 26.2.

26.3 La altura en centímetros de 40 estudiantes de la escuela Rómulo Gallegos se muestra en la tabla de la fig. 26.15. Dibuja un histograma correspondiente a esos datos.

156	163	160	162	158	163	159	161	164	162
164	165	159	166	160	164	161	165	164	166
167	161	164	163	167	158	164	162	168	169
164	159	166	157	169	165	167	164	169	170

Fig. 26.15 Ejercicio 26.3.

26.4 Con el fin de determinar la posible adulteración de las pesas de un mercado público, la Oficina de Protección al Consumidor tomó una masa estándar de 1 kg y procedió a constatar lo que marcaban 50 pesas. Los resultados se muestran en la fig. 26.16. Dibuja: a) Un gráfico de barras verticales de los datos. b) Un histograma. c) El polígono de frecuencias. d) Interpreta los resultados.

0,9€	1,0€	1,0€	1,0€	1,1€	1,0€	1,0€	1,0€	1,1€	1,1€
1,0€	1,1€	0,9€	1,1€	1,0€	1,0€	1,1€	1,0€	1,1€	1,2€
1,0€	1,0€	1,0€	1,1€	0,9€	1,0€	1,0€	1,0€	1,1€	1,1€
1,1€	1,0€	1,1€	1,0€	1,0€	1,0€	1,1€	1,1€	1,2€	1,2€
1,0€	1,1€	0,9€	1,1€	1,0€	1,0€	1,0€	1,0€	1,1€	1,2€

Fig. 26.16 Ejercicio 26.4.

26.5 EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Existen dos maneras de definir probabilidad. Abordaremos cada una de ellas. A la primera forma se le conoce como *definición clásica o a priori*, mientras que a la otra se le conoce como *definición con base experimental o a posteriori*.

26.5.1 Definición clásica de probabilidad (a priori)

Imagina que se lanza una moneda al aire y apostamos a que saldrá cara. Tusabes que al caer la moneda debe salir cara o sello (hay dos opciones). Entonces tenemos:

n = Número de opciones favorables: 1 (Que salga cara)

N = Número total de opciones: 2 (Cara + sello)

La probabilidad se denota por la letra p y se define como:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de opciones favorables}}{\text{Número de opciones posibles}}$$

Es decir:

$$p = \frac{n}{N} \quad (26.6)$$

En el caso del lanzamiento de la moneda se tendrá:

$$n = 1 \quad N = 2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n}{N} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Lo que indica que la probabilidad de que salga cara es 0,50 o el 50%. Por extensión, la probabilidad de que salga sello es también 0,50.

La probabilidad es una cantidad numérica tal que su valor es mayor o igual que 0 y menor o igual a 1.

Podemos escribir entonces:

$$0 \leq p \leq 1 \quad (26.7)$$

La condición $p = 0$ significa que no hay ninguna probabilidad de que la opción favorable tenga lugar. Así, si planteamos el problema del lanzamiento de la moneda en los términos siguientes: "¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda sobre un piso de cemento la moneda caiga de canto?", podemos escribir:

n = Número de opciones favorables (que la moneda caiga de canto) = 0

N = Número de totales de opciones posibles = 2 (Cara + sello)

Luego:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{0}{2} = 0$$

La condición $p = 1$ significa que con seguridad el evento favorable tendrá lugar. Si replanteamos nuevamente el experimento de lanzar la moneda al aire: "¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga cara o sello?". Del enunciado anterior deducimos lo siguiente:

n = Número de opciones favorables (que la moneda caiga cara o sello) = 2

N = Número de totales de opciones posibles = 2 (Cara + sello)

Luego:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{2}{2} = 1$$

26.5.2 Definición con base experimental (a posteriori).

Imagina que se lanza una moneda al aire 500 veces y que se obtienen los siguientes resultados:

Número de lanzamientos	Cara	Sello
500	235	265

La probabilidad de que salga sello la definimos como:

$$p = \frac{\text{Número de veces que salió sello}}{\text{Número de veces que se lanzó la moneda}} \quad (26.8)$$

Sustituyendo valores:

$$p = \frac{265}{500} = 0,53 \text{ (53\%)}$$

La probabilidad de que salga cara la definimos como:

$$p = \frac{\text{Número de veces que salió cara}}{\text{Número de veces que se lanzó la moneda}} \quad (26.9)$$

Sustituyendo valores:

$$p = \frac{235}{500} = 0,47 \text{ (47\%)}$$

Ahora bien, ¿por qué estos valores no coinciden con los previamente calculados (50%)? La respuesta está en el número de lanzamientos que se efectuaron. Si en vez de lanzar la moneda 500 veces, se lanza 1.000 veces, el resultado obtenido al sustituir valores en (26.8) y (26.9) se acercará más al valor 0,50 hallado anteriormente.

En general, si tenemos un experimento que se repite N veces, donde N es un

número muy grande y se observa que el número de veces que ocurre un evento de interés es n , podemos definir probabilidad como:

$$p = \frac{\text{Número de veces que ocurre un evento de interés}}{\text{Número de veces que tiene lugar un experimento}} = \frac{n}{N}$$

■ EJEMPLO 26.8

Si se lanza un dado una vez, determina la probabilidad de que salga el número 5.

Solución

Al lanzar un dado se pueden obtener los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Podemos, por tanto, escribir:

Opción favorable: que salga 5.

Como el dado se lanza una sola vez, el número 5 puede también salir sólo una vez. Por tanto:

$$n = 1$$

Como hay 6 números que pueden salir, $N = 6$ y se tendrá:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{1}{6} = 0,166 \quad (16,6\%)$$

■ EJEMPLO 26.9

En una caja hay 3 pelotas negras y 7 blancas. Se saca una pelota sin ver. Determina la probabilidad de sacar: a) Una pelota negra. b) Una pelota blanca. c) Una pelota roja.

Solución

a) Como hay 10 pelotas hay 10 opciones posibles; es decir $N = 10$. De las 10 pelotas hay sólo 3 pelotas negras y, por lo tanto, el número de opciones favorables es $n = 3$. La probabilidad de sacar una pelota negra es entonces:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{3}{10} = 0,30 \quad (30\%)$$

b) Dado que hay 7 pelotas blancas, hay 7 opciones favorables. Como el número de pelotas es $N = 10$, se tiene:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{7}{10} = 0,70 \quad (70\%)$$

c) Como no hay pelotas rojas, el número de opciones favorables es $n = 0$. Luego:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{0}{10} = 0$$

■ EJEMPLO 26.10

Se tienen 11 metras en una botella a las cuales se les han asignado los números del 1 al 11. Al voltear la botella: **a)** ¿Qué probabilidad hay de que salga primero un número mayor que 7? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que el número que salga primero sea primo? ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?

Solución

a) Como las metras están numeradas del 1 al 11, los números mayores que 7 son: 8, 9, 10 y 11. Luego el número de opciones favorable es $n = 4$. Como puede salir cualquier número del 1 al 11, el número total de opciones es $N = 11$. La probabilidad de que salga un número mayor que 7 es entonces:

$$p = \frac{\text{Número de opciones favorables}}{\text{Número de opciones posibles}} = \frac{4}{11} = 0,36 \quad (36\%)$$

b) Del número 1 al 11 hay 6 números primos: 2, 3, 5, 7 y 11, por tanto:

Número de opciones favorables: $n = 5$. Como N es igual a 11, se tiene:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{5}{11} = 0,454 \quad (45,4\%)$$

c) Del 1 al 11 hay 5 números pares: 2, 4, 6, 8 y 10. Entonces, $n = 5$, $N = 11$. Luego:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{5}{11} = 0,454 \quad (45,4\%)$$

■ EJEMPLO 26.11

En un salón de clases hay 38 alumnos, de los cuales 14 son hembras y el resto varones. El profesor selecciona al azar un alumno para hacer una pregunta: **a)** ¿Qué probabilidad hay de que seleccione una hembra? **b)** ¿Qué probabilidad hay de que seleccione un varón? **c)** ¿Qué probabilidad hay de que seleccione a Patricia?

Solución

a) Como el número de hembras es 14: $n = 14$. Dado que hay 38 alumnos: $N = 38$

$$p_1 = \text{Probabilidad de seleccionar una hembra} = \frac{14}{38} = 0,368 \quad (36,8\%)$$

b) Como el número de varones es $38 - 14 = 24$. Luego,

$$p_2 = \text{Probabilidad de seleccionar un varón} = \frac{24}{38} = 0,632 \quad (63,2\%)$$

Observa que $p_1 + p_2 = \frac{14}{38} + \frac{24}{38} = 1$ (¿Por qué?)

c) Como Patricia es sólo un alumno entre los 38 del salón $n = 1$. La probabilidad de que el profesor seleccione a Patricia es:

$$p = \frac{1}{38} = 0,026 \quad (2,6\%)$$

Es decir, la probabilidad de que el profesor le pregunte a un alumno en particular, en este caso Patricia, es muy pequeña.

■ EJEMPLO 26.12

Ernesto, Elio, Juan y Rolando están jugando con un paquete de 40 cartas. Al extraer al azar una carta: a) ¿Cuál es la probabilidad de que Ernesto saque copa? b) ¿Cuál es la probabilidad de que Elio saque un 7? c) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan saque el caballo de espada? d) ¿Cuál es la probabilidad de que Rolando saque oro o basto?

Solución

a) En un juego de 40 cartas hay 10 cartas de basto, 10 de copa, 10 de espada y 10 de oro. Si Ernesto saca una carta, hay 10 opciones favorables para que sea copa (As, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo y rey). Luego, podemos escribir:

Número de opciones favorables: $n = 10$

Número de opciones posibles: $N = 40$

Luego,

$$\text{Probabilidad que Ernesto saque copa: } p_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \quad (25\%)$$

b) En un juego de 40 cartas hay cuatro 7: oro, espada, copa y basto.

Número de opciones favorables: $n = 4$

Número de opciones posibles: $N = 40$

Entonces,

$$\text{Probabilidad que Elio saque un siete: } p_2 = \frac{4}{40} = 0,10 \quad (10\%)$$

c) En las 40 cartas hay 1 caballo de espada, por lo que:

Número de opciones favorables: $n = 1$

Número de opciones posibles: $N = 40$

Entonces, la probabilidad de que Juan saque el caballo de espada es:

$$p_3 = \frac{1}{40} = 0,025 \quad (2,5\%)$$

d) En las 40 cartas hay 10 de oro y 10 de basto, lo que hace un total de 20 opciones favorables:

Número de opciones favorables: $n = 20$

Número de opciones posibles: $N = 40$

Así, la probabilidad de que Rolando saque oro o basto es:

$$p_3 = \frac{20}{40} = 0,5 \quad (50\%)$$

■ EJEMPLO 26.13

En un cilindro de vidrio se colocan 4 bolas negras y 5 blancas. Irene saca una bola al azar y no la devuelve al cilindro. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea negra? **b)** Si la bola que Irene sacó fue negra, ¿qué probabilidad tiene Héctor de sacar una bola blanca?

Solución

a) Dado que hay 4 bolas negras de un total de 9, podemos escribir:

Número de opciones favorables: $n = 4$

Número de opciones posibles: $N = 9$

$$\text{Probabilidad que la bola sea negra: } p = \frac{4}{9} = 0,444 \quad (44,4\%)$$

b) Si Irene sacó una bola negra y no la devolvió, quedarían en el envase 8 bolas y por lo tanto la probabilidad de que Héctor saque una bola blanca puede determinarse como sigue:

Número de opciones favorables: $n = 5$

Número de opciones posibles: $N = 8$

$$\text{Probabilidad de que Héctor saque una bola blanca: } p = \frac{5}{8} = 0,625 \quad (62,5\%)$$

26.6 PROBABILIDAD DE QUE UN SUCESO NO OCURRA

En la sección anterior hemos estudiado la probabilidad de que un suceso tenga lugar. Nos hacíamos preguntas como: "¿cuál es la probabilidad de que al lanzar

un dado salga el número 4?" Otra pregunta que uno podría hacerse es: "¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado no salga 4?" Evidentemente, se trata de sucesos excluyentes: si sale 4 es porque no sale otro número y si no sale 4 es porque sale otro número.

La probabilidad de que un suceso no ocurra está dada por:

$$p' = 1 - p \quad (26.10)$$

donde p es la probabilidad de que el suceso ocurra. Los ejemplos que siguen ilustran la aplicación de la relación (26.10).

■ EJEMPLO 26.14

¿Cuál es la probabilidad de que no salga 3 al lanzar un dado?

Solución

La probabilidad de que salga 3 al lanzar un dado es:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$$

luego, la probabilidad de que no salga 3 es, usando (26.10):

$$p' = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0,833 \quad (83,3\%)$$

El resultado anterior pudo también haberse obtenido, si observamos que hay 5 opciones favorables para que el número 3 no aparezca y que el número total de opciones es 6:

Número de opciones favorables: (1, 2, 4, 5, 6) $\Rightarrow n = 5$

Número de opciones posibles: (1, 2, 3, 4, 5, 6) $\Rightarrow N = 6$

Por tanto:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{5}{6} = 0,833 \quad (83,3\%)$$

■ EJEMPLO 26.15

Un entrenador de beisbol tiene en un saco 6 pelotas rojas, 3 blancas y 2 azules. Si se lanza al bateador una pelota seleccionada al azar, calcula la probabilidad de que **a)** Sea blanca.

b) No sea blanca. **c)** Sea blanca o azul. **d)** No sea blanca o azul.

Solución

a) Se tiene:

Número de opciones favorables (pelotas blancas): $n = 3$

Número de opciones posibles (pelotas rojas + blancas + azules): $N = 11$

Entonces:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{3}{11} = 0,272 \quad (27,2\%)$$

b) La probabilidad de que no sea blanca es:

$$p' = 1 - p = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} = 0,727 \quad (72,7\%)$$

c) La probabilidad de que la pelota sea blanca o azul, se obtiene observando que el número de opciones favorables (pelotas blancas + azules) es $n = 5$. Luego:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{5}{11} = 0,454 \quad (45,4\%)$$

d) La probabilidad de que no sea blanca o azul está dada por:

$$p' = 1 - p = 1 - 0,454 = 0,546 \quad (54,6\%)$$

◆ EJERCICIOS

26.5 Cita 3 fenómenos o experimentos determinísticos y 3 aleatorios.

26.6 ¿Cuál es la probabilidad de que salga 2 al lanzar un dado?

26.7 ¿Cuáles la probabilidad de que al lanzar un dado salga **a)** El número 6 **b)** El número 1. **c)** El número 1 o el 6.

26.8 ¿Qué probabilidad existe de que al lanzar un dado salga el número 3?

26.9 ¿Qué probabilidad existe de que al lanzar un dado salga cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6?

26.10 En una caja hay 5 pelotas negras y 4 blancas. Se saca una de ellas al azar. Determina la probabilidad de que la pelota sea: **a)** Negra. **b)** Blanca. **c)** Negra o blanca. **d)** Roja.

26.11 En una caja hay 3 pelotas negras, 7 blancas y 1 azul. Encuentra la probabilidad de que la pelota sea: **a)** Negra. **b)** Blanca. **c)** Negra o blanca. **d)** Roja.

26.12 En una botella se tienen 17 metras enumeradas del 1 al 17. Sólo una metra cabe por

el cuello de la botella. Al voltearla, ¿qué probabilidad hay de que salga primero: **a)** El número 10. **b)** Los números 8 o 13. **c)** Los números 1 o 6 o 12.

26.13 En una botella se tienen 29 metras a las que se les han puesto los números del 1 al 29. Sólo una metra cabe por el cuello de la botella. Al voltear la botella, ¿qué probabilidad hay de que salga primero: **a)** Un número mayor que 7. **b)** Un número mayor que 18. **c)** Un número primo. **d)** Un número par. **e)** Un número impar. **f)** El número 0.

26.14 En un salón de clases hay 40 alumnos, de los cuales 23 son hembras. El profesor selecciona al azar un alumno para preguntarle. ¿Qué probabilidad existe de que seleccione: **a)** Un varón. **b)** Una hembra. **c)** A Claudio?

26.15 Maritza, Edmundo, Ramón y Rafael están jugando con un paquete de 40 cartas. Al extraer una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que: **a)** Maritza saque basto. **b)** Edmundo saque un as. **c)** Ramón saque un caballo o un 6. **d)** Rafael saque el caballo o la sota de copa?

26.16 En un cilindro de acero se colocan 4 esferas de oro y 11 de plata. Mónica saca una esfera y no la devuelve al envase cilíndrico. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que la esfera sea de oro? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea de plata? **c)** Si la esfera que sacó Mónica fue de plata, ¿qué probabilidad tiene Mirian de sacar una esfera de oro?

26.17 ¿Cuál es la probabilidad de que no salga 6 al lanzar un dado?

26.18 Se saca una carta de un juego de 40. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea espada? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un rey?

26.19 Un entrenador de beisbol tiene en un saco 4 pelotas rojas, 7 blancas y 3 azules. Si se lanza al bateador una pelota seleccionada al azar, calcula la probabilidad de que: **a)** Sea roja. **b)** No sea roja. **c)** Sea blanca. **d)** No sea blanca. **e)** Sea azul. **f)** No sea azul. **g)** Sea blanca o roja. **h)** No sea blanca o roja.

26.7 DIAGRAMAS DE ÁRBOL

El *diagrama de árbol* es una representación de las distintas alternativas que pueden ocurrir en un fenómeno o experimento aleatorio. Esta representación permite visualizar todos los posibles resultados en el experimento. Los ejemplos que siguen te ayudarán a comprender el uso de los diagramas de árbol en la determinación de la probabilidad de un suceso específico. Supongamos que se desea determinar la probabilidad de que en un matrimonio el primer hijo sea hembra, el segundo varón y el tercero hembra. Las diferentes alternativas son las siguientes. (V: varón, H: hembra):

Primer hijo	Segundo hijo	Tercer Hijo	Representación
Varón	Varón	Varón	VVV
Varón	Varón	Hembra	VVH
Varón	Hembra	Varón	VHV
Varón	Hembra	Hembra	VHH
Hembra	Hembra	Hembra	HHH
Hembra	Hembra	Varón	HHV
Hembra	Varón	Hembra	HVH
Hembra	Varón	Varón	HVV

En las ramas del diagrama del árbol se coloca la probabilidad de que ocurra cada suceso. Así por ejemplo, la probabilidad de que el primer hijo sea hembra es $1/2$ ($n = 1, N = 2$) y este número aparece en la fig. 26.17 sobre la línea gruesa de la izquierda.

El único camino favorable en el diagrama de árbol, de acuerdo a la suposición hecha anteriormente, está indicado por las líneas gruesas en la fig. 26.17.

Luego, la probabilidad de que el 1er. hijo sea hembra está dada por:

$$p(H) = \frac{1}{2}$$

Las probabilidades de que el 2do. hijo sea varón y el tercero hembra son:

$$p(V) = \frac{1}{2} \quad p(H) = \frac{1}{2}$$

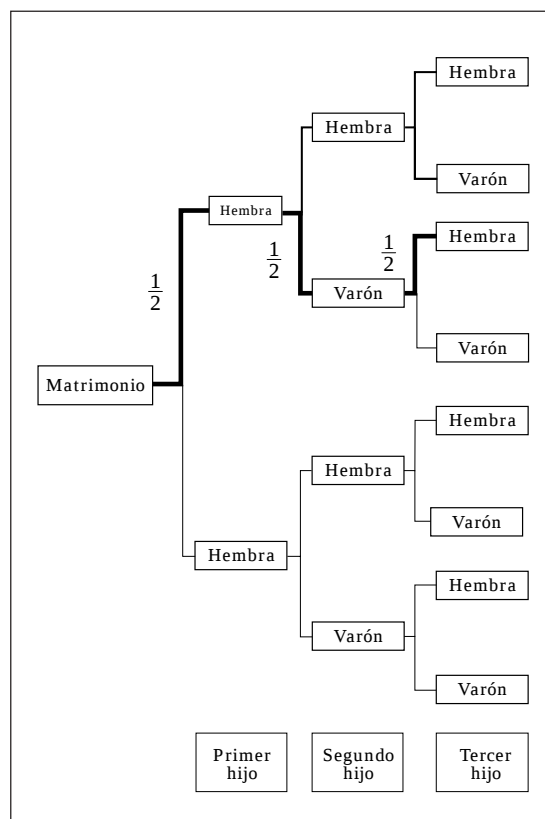


Fig. 26.17 Diagrama de árbol para determinar la probabilidad de que en un matrimonio el primer hijo sea hembra, el segundo varón y el tercero hembra.

La probabilidad de que el primer hijo sea hembra, el segundo varón y el tercero hembra, $p(\text{HVH})$, se obtiene multiplicando la probabilidad $p(\text{H})$ por $p(\text{V})$ y por $p(\text{H})$, es decir,

$$p(\text{HVH}) = p(\text{H}) \cdot p(\text{V}) \cdot p(\text{H})$$

Sustituyendo valores:

$$p(\text{HVH}) = p(\text{H}) \cdot p(\text{V}) \cdot p(\text{H}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Observa que, en el diagrama de árbol nos hemos movido desde el punto inicial (matrimonio) hasta el punto final (hembra) siguiendo la trayectoria desde la izquierda hacia la derecha marcada por las líneas gruesas. Las probabilidades encontradas en la trayectorias, $p(\text{H})$, $p(\text{V})$ y $p(\text{H})$ son multiplicadas entre sí. Esto es posible porque los sucesos (hembra en el primer hijo), (varón en el segundo hijo) y (hembra en el tercer hijo) son *independientes*.

En un experimento o fenómeno aleatorio dos sucesos A y B son independientes si la probabilidad de que ocurra A no es afectada por la ocurrencia o no ocurrencia de B.

En el caso que nos ocupa, la probabilidad de que el segundo o el tercer hijo sean hembra o varón no es afectada porque el primer hijo sea varón o hembra. Es decir, los sucesos son independientes. Los ejemplos que siguen ilustran varios casos donde el uso de diagramas de árbol facilita la solución de los problemas

■ EJEMPLO 26.16

Se lanzan dos monedas al aire. Mediante el uso de un diagrama de árbol, determina la probabilidad de que las dos salgan cara.

Solución

En la fig. 26.18 se muestra el diagrama de árbol. En el lanzamiento de la primera moneda puede salir cara o sello. Si la primera moneda sale cara, la segunda moneda puede salir cara o sello. Si la primera moneda sale sello, la segunda puede salir cara o sello. La probabilidad de cara $p(c)$, o sello $p(s)$, es:

$$p(c) = p(s) = \frac{1}{2}$$

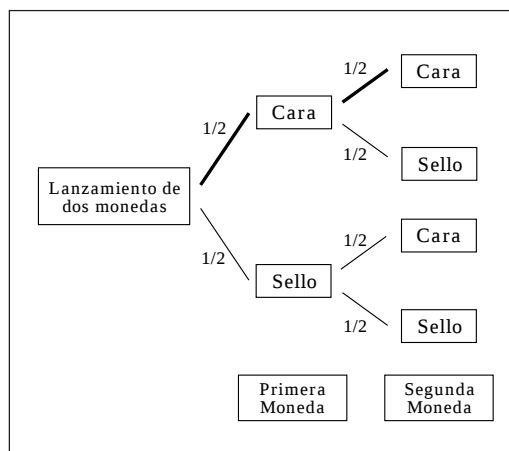


Fig. 26.18 Diagrama de árbol para el ejemplo 26.16.

El único camino favorable (cara-cara) es el indicado por las líneas gruesas de la fig. 26.18. Como los caminos representan eventos independientes (que salga cara en la segunda moneda no tiene nada que ver con que haya salido cara en la primera), podemos escribir:

$$p(\text{cara} - \text{cara}) = p(cc) = p(c) \cdot p(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

■ EJEMPLO 26.17

Supongamos que tenemos dos cajas de las cuales la primera contiene 4 bolas blancas y 2 negras, mientras que la segunda contiene 3 blancas y 5 negras. Se selecciona una caja al azar y se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

Solución

El problema consta de dos pasos:

1. Selección de una de las cajas.
2. Selección de una bola.

El diagrama de árbol de la fig. 26.19 muestra las distintas posibilidades que se tienen. Las

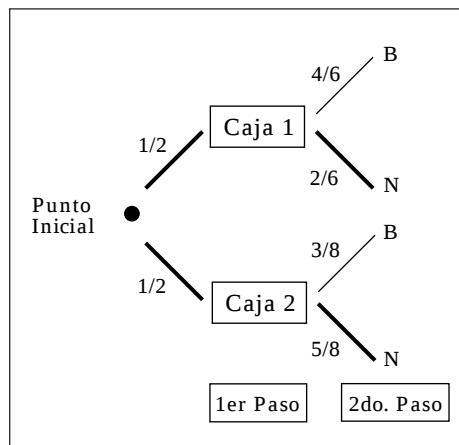


Fig. 26.19 Diagrama de árbol para el ejemplo 26.17.

bolas blancas y negras están representadas por las letras B y N, respectivamente. Si denotamos con el número 1 a la caja 1 y con el número 2 a la caja 2 tendremos las siguientes alternativas. a) Si seleccionamos la caja 1:

$$\text{Probabilidad de seleccionar la caja 1} = p(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Probabilidad de extraer una bola negra de la caja 1} = p(N) = \frac{2}{6}$$

Entonces, la probabilidad de seleccionar la caja 1 y extraer una bola negra es:

$$p(1, N) = p(1) \cdot p(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

b) Si seleccionamos la caja 2:

$$\text{Probabilidad de seleccionar la caja 2} = p(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Probabilidad de extraer una bola negra de la caja 2} = p(N) = \frac{5}{8}$$

Luego, la probabilidad de seleccionar la caja 2 y extraer una bola negra es:

$$p(2, N) = p(2) \cdot p(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$$

Observa ahora en el diagrama de árbol que hay dos caminos distintos para ir desde el punto inicial al extremo final del árbol, siguiendo trayectorias correspondientes a las líneas gruesas en la fig. 26.19. Estas dos trayectorias distintas indican que hay que sumar $p(1, N)$ y $p(2, N)$. En base a esto podemos escribir la probabilidad de sacar una bola negra de cualquiera de las cajas:

$$p(N) = p(1, N) + p(2, N) = \frac{1}{6} + \frac{5}{16} = \frac{23}{48} = 0,479 \quad (47,9\%)$$

■ EJEMPLO 26.18

En una caja hay 3 bolas negras, 1 blanca y 2 rojas. Se extrae una bola al azar y luego se devuelve a la caja. Posteriormente se extrae una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) Ambas bolas sean rojas. b) Una sea roja y otra blanca. c) Ninguna sea negra. d) Al menos una sea blanca?

Solución

La fig. 26.20 muestra el diagrama de árbol. Las probabilidades de que la primera bola sea roja, blanca o negra están dadas respectivamente por:

$$\text{Roja:} \quad p(R) = \frac{n_R}{N} = \frac{2}{6}$$

$$\text{Blanca:} \quad p(B) = \frac{n_B}{N} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Negra:} \quad p(N) = \frac{n_N}{N} = \frac{3}{6}$$

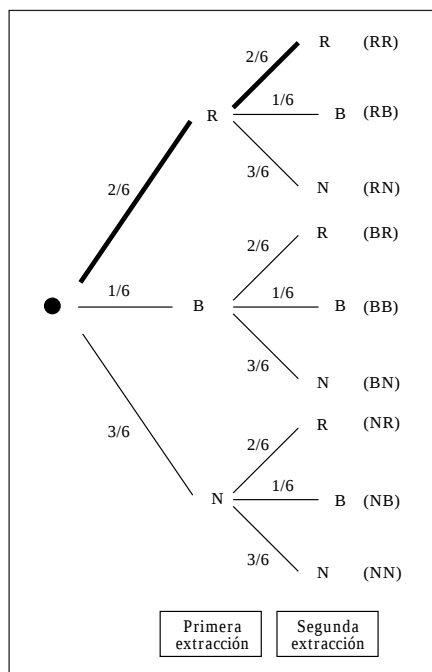


Fig. 26.20 Diagrama de árbol para el ejemplo 26.18.

donde n_R , n_B y n_N representan la cantidad de bolas rojas, blancas y negras respectivamente. Como las bolas se reponen en la caja, en la segunda extracción las posibilidades de sacar bolas rojas, blancas o negras, son las ya calculadas, $p(R)$, $p(B)$ y $p(N)$.

a) De las 9 opciones posibles, sólo RR es favorable, ya que indicaría la extracción de dos bolas rojas en el primer y segundo intento. Las líneas gruesas de la fig. 26.20 muestran el recorrido sobre el árbol para obtener 2 bolas rojas. Como las posibilidades sobre las ramas gruesas son $2/6$ y $2/6$ se tendrá:

$$p(RR) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

b) Para este caso el diagrama de árbol también nos indica cómo calcular la probabilidad. Observa la fig. 26.21. En el diagrama de árbol hay 2 trayectorias distintas, marcadas por las líneas gruesas, para obtener RB o BR.

A fin de obtener $p(RB)$ multiplicamos $p(R)$ por $p(B)$:

$$p(RB) = p(R) \cdot p(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

Para obtener $p(BR)$ tenemos:

$$p(BR) = p(B) \cdot p(R) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$$

Como hay dos trayectorias distintas para obtener RB o BR, debemos sumar las probabilidades anteriores para obtener la probabilidad de que una bola sea roja y otra blanca:

$$p = p(RB) + p(BR)$$

$$p = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

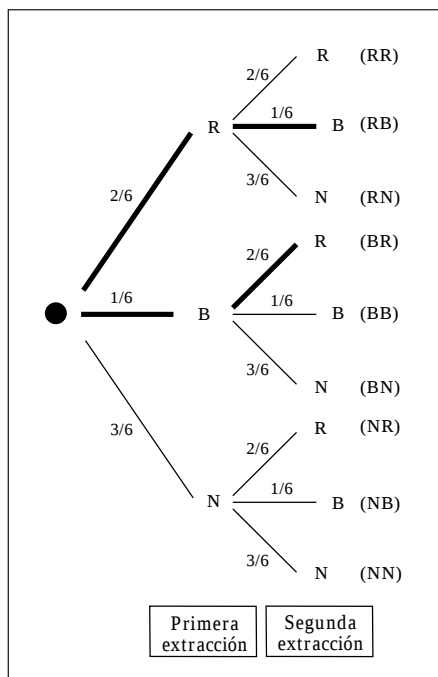


Fig. 26.21 Diagrama de árbol para el cálculo de la probabilidad de que una bola sea blanca y otra roja. Ejemplo 26.18.

c) Para calcular la probabilidad de que ninguna sea negra, observa nuevamente el diagrama de árbol de la fig. 26.22. Las opciones que representan la condición de que ninguna bola sea negra están señaladas con las líneas gruesas. Estas son: RR, RB, BR, BB. Las probabilidades de estas opciones son:

$$p(RR) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

$$p(BR) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$$

$$p(RB) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$p(BB) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

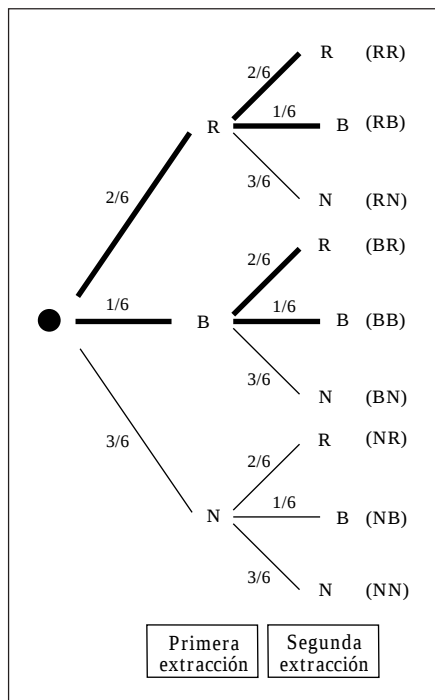


Fig. 26.22 Diagrama de árbol para determinar la probabilidad de que ninguna bola sea negra.

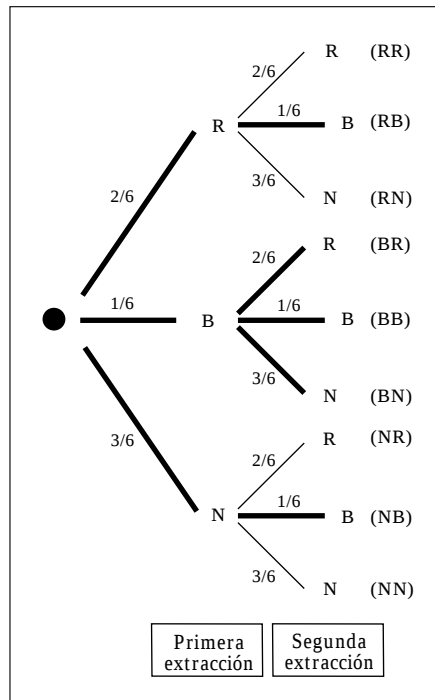


Fig. 26.23 Diagrama de árbol para determinar la probabilidad de que al menos una de las bolas extraídas sea blanca. Ejemplo 26.18.

Como hay 4 caminos distintos para estas opciones, tenemos que sumar las 4 probabilidades anteriores. Es decir, la probabilidad de que ninguna bola sea negra está dada por:

$$p = p(RR) + p(RB) + p(BR) + p(BB) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$$

d) La probabilidad de que al menos una de las bolas extraídas sea blanca podemos calcularla de acuerdo con el diagrama de árbol presentado en la fig. 26.23, donde las líneas gruesas indican las distintas opciones favorables, RB, BR, BB, BN, NB. Para cada una de esas opciones anteriores podemos establecer las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} p(RB) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} & p(BR) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36} & p(BB) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ p(BN) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36} & p(NB) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36} \end{aligned}$$

Como hay 5 caminos distintos para estas opciones favorables, tenemos que sumar las probabilidades anteriores para determinar la probabilidad de que al menos una de las bolas extraídas sea blanca:

$$p = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

◆ EJERCICIOS

Resuelve todos los ejercicios siguientes mediante el uso de diagramas de árbol.

26.20 Determina la probabilidad de que en un matrimonio el primer hijo sea varón y el segundo hembra.

26.21 Determina la probabilidad de que un matrimonio el primer hijo sea varón y los dos siguientes hembras.

26.22 Un matrimonio decide tener 3 hijos. Determina la probabilidad de que el tercero sea hembra.

26.23 Una pareja desea tener dos hijos de forma que los dos sean del mismo sexo. ¿Cuál es su probabilidad de lograrlo?

26.24 Ernesto y Patricia se casan y deciden tener 3 hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea varón?

26.25 Para el año 2000 se piensa que las parejas podrán elegir el sexo de sus hijos a voluntad. Hugo e Irene quieren tener el primer hijo varón y el segundo hembra. ¿Cuál es la probabilidad de que su deseo se cumpla?

26.26 Se lanzan 2 monedas al aire. Determina la probabilidad de que: **a)** Las dos salgan sello. **b)** Una salga cara y la otra sello. **c)** La primera sea sello y la segunda cara.

26.27 Se tiene una caja A que contiene 3 bolas blancas y 1 negra y otra B que contiene 2 blancas y 4 negras. Se selecciona una caja al azar y se extrae una bola. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la caja A? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la caja B? **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca? **d)** ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea negra? **e)** ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

26.28 En una caja hay 4 bolas negras, 2 blancas y 1 roja. Se extrae una bola al azar y se devuelve a la caja. Posteriormente se selecciona una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que: **a)** Ambas bolas sean negras. **b)** Las dos sean blancas. **c)** Las dos sean rojas. **d)** Una sea negra y una blanca. **e)** Una sea negra y la otra roja. **f)** Una sea blanca y la otra roja?

27.1 ¿QUÉ ES UNA COMPUTADORA? HARDWARE Y SOFTWARE.

Una computadora es un sistema constituido por varias unidades mecánicas y electrónicas y cuya función fundamental es el procesamiento de datos a una gran velocidad y con una gran precisión.

Para llevar a cabo el procesamiento de datos es necesario instruir a la computadora sobre la manera cómo va a realizar las operaciones. A estas instrucciones de operación se les conocen con el nombre de **programa**, que es *un conjunto de pasos ordenados de acuerdo con un algoritmo específico*. Este programa es **almacenado** dentro del sistema de computación.

De acuerdo a lo señalado anteriormente, podemos resumir diciendo que el computador es un sistema para procesar datos con las siguientes características:

- Gran velocidad.
- Alta precisión.
- Actúa bajo la dirección de un programa.
- Tiene capacidad de almacenamiento.

En la fig. 27.1 se presenta un diagrama de bloques general para un computador.

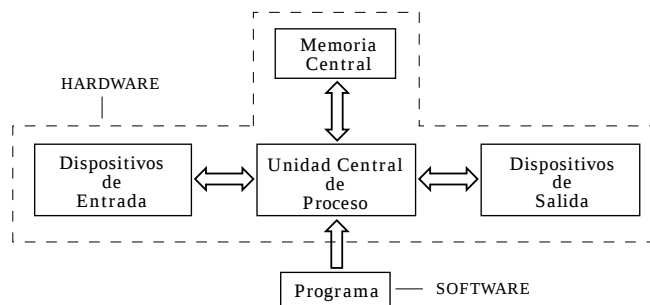


Fig. 27.1 Diagrama de bloques de un computador.

Al conjunto físico formado por componentes electrónicos y componentes mecánicos del sistema de computación se le conoce con el nombre de **hardware**. Es, digámoslo así, la parte visible del sistema. Los dispositivos de

entrada, la unidad central de proceso, la memoria central y los dispositivos de salida corresponden al hardware.

A los programas de computación, sin los cuales la máquina no puede efectuar operaciones, se les designa con el nombre de **software**. Los programas son ejecutados por la unidad central de proceso en una forma secuencial de acuerdo con el algoritmo a ser aplicado.

Las dobles flechas mostradas en la fig. 27.1 indican que hay una comunicación recíproca entre las unidades señaladas por ellas. Así, puede decirse que los dispositivos de entrada se comunican con la unidad central de proceso y viceversa.

Al conjunto de dispositivos de entrada, de salida, la unidad central de procesos y la memoria central también se le conoce con el nombre de **arquitectura del computador**.

Como podemos ver en la fig. 27.1, un sistema de computación está conformado por los dispositivos de entrada y de salida, llamados también periféricos, por la unidad central de procesos, conocida comúnmente como CPU (de las iniciales en inglés de "Central Processing Unit") y por la memoria. A continuación describimos cada una de esos elementos constituyentes.

27.2 COMPONENTES DE UN SISTEMA DE COMPUTACIÓN

Dispositivos de entrada

Son los elementos que permiten introducir los datos en la unidad central de procesos. Entre estos dispositivos podemos mencionar los siguientes:

- a. Teclado alfanumérico: permite una comunicación directa entre las personas y las computadoras. Este teclado es parecido al de las máquinas de escribir.
- b. Discos flexibles: son discos plásticos recubiertos por un material magnético, el cual permite la grabación de los datos.
- c. Discos duros: son discos magnéticos rígidos de mayor capacidad de información que los discos flexibles..
- d. Ratón: es un dispositivo electromecánico o electro-óptico que permite introducir información a la computadora en una forma muy intuitiva, tal como señalar en el monitor de la misma la acción que se desea tomar.
- e. Cintas magnéticas: se trata de cintas plásticas recubiertas con material magnético que contiene los datos a ser procesados.

Normalmente los dispositivos de entrada "traducen" las instrucciones dadas por el personal que trabaja, en un código especial (código binario) llamado **denguaje de máquina**, que es el que también usa la CPU para realizar sus operaciones.

Dispositivos de salida

Son los elementos que permiten a las computadoras canalizar sus resultados hacia la salida para ser interpretados por la persona interesada. La comunicación entre la CPU y los dispositivos de salida también se realiza en un código de máquina, por lo que tales dispositivos se encargan de traducir ese código a un lenguaje que el ser humano pueda entender. Entre los dispositivos de salida podemos mencionar :

- a. Impresora: escribe sobre papel con los márgenes perforados, o también sobre papel común los resultados de las operaciones. La impresión de los caracteres se hace por puntos, en una forma discontinua cuando se trata de una impresora de matriz o en una forma más atractiva cuando se trata de una impresora láser o de inyección de tinta.
- b. Monitor o pantalla visual: permite visualizar en un monitor la salida del sistema.
- c. Cinta o disco magnético: sobre la superficie magnética de cintas y discos se graba la información de salida para su uso posterior.

En la fig. 27.2 se ilustran, mediante un diagrama de bloques, las posibles configuraciones de entrada y de salida de un sistema de computación.

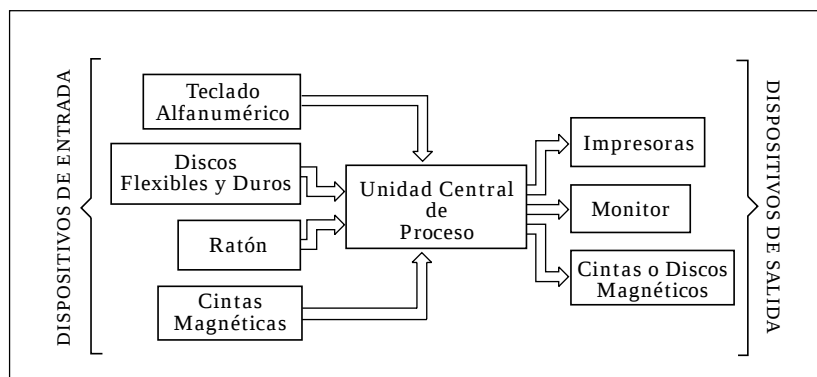


Fig. 27.2 Tipos de dispositivos de entrada y de salida en un sistema de computación.

Para resumir, podemos decir que los dispositivos de entrada y de salida son los constituyentes de un sistema de computación que permiten la comunicación entre el hombre y la máquina.

Unidad central de procesos

Conocida popularmente como "el cerebro" o "el corazón" del computador, **la unidad central de procesos** es la sección de la cual depende el sistema para realizar el procesamiento de datos de una manera significativa.

Convencionalmente, en la unidad central de procesos se cuenta con tres secciones fundamentales (ver fig. 27.3):

- La memoria principal.
- La unidad aritmético-lógica.
- La unidad de control.

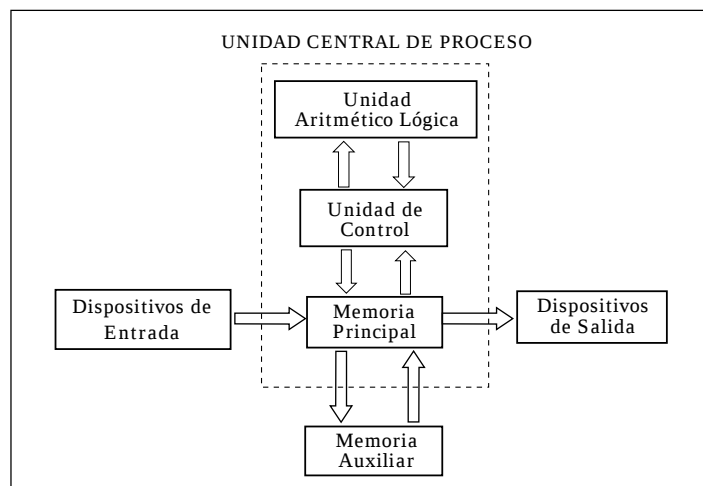


Fig. 27.3 Los componentes principales de la unidad central de procesos son: la unidad aritmético-lógica, la unidad de control y la memoria principal. Los dispositivos de entrada y de salida y la memoria auxiliar son elementos periféricos.

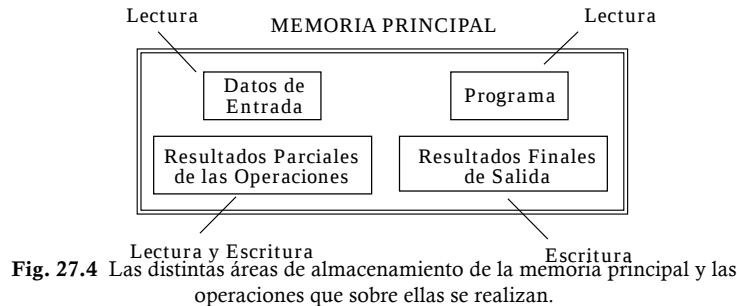
A continuación discutimos cada una de estas secciones.

Memoria principal

La **memoria principal** tiene como función básica guardar (o almacenar) los datos de entrada y el programa que gobierna la operación de todo el sistema. Posee además la memoria principal, áreas para el almacenamiento de los resultados parciales de las operaciones y para el almacenamiento de los resultados finales de salida. En la fig. 27.4 se muestran estas 4 áreas de la memoria principal.

Sobre la memoria principal se efectúan operaciones de lectura y escritura.

Normalmente se leen los datos de entrada y los resultados parciales de las operaciones. En la operación de escritura están envueltos los resultados parciales de las operaciones y los resultados finales de salida.



Además de la memoria principal, los computadores poseen las llamadas memorias auxiliares que permiten almacenar información en dispositivos externos (periféricos) a la CPU. Estas memorias auxiliares las conforman unidades de **discos externos** (discos **flexibles** y discos **duros**).

Unidad aritmético-lógica

Todas las operaciones del computador son realizadas en la **unidad aritmético-lógica**. Como su nombre lo indica, esta unidad ejecuta tanto operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) como operaciones de decisión (operaciones lógicas). Estas últimas operaciones estaban representadas en los diagramas de flujo estudiados por ti por los símbolos en forma de diamante. Los datos que ingresan a la unidad aritmético-lógica para ser procesados provienen de la memoria principal.

Unidad de control

Esta unidad controla y coordina las operaciones que tienen lugar en el sistema de computación. Entre las funciones de la unidad de control podemos mencionar las siguientes:

1. Emite órdenes para que los datos de entrada pasen a la memoria principal.
2. Define las operaciones que la unidad aritmético-lógica debe hacer con los datos que recibe.
3. Determina el momento cuando deben transferirse los datos procesados a la salida.
4. Distribuye órdenes de acuerdo a los comandos establecidos en el programa.

28.1 LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN

Los diagramas de flujo permiten establecer los pasos que deben seguirse para la solución de un problema. Usualmente, quien diseña un diagrama de flujo asocia la ejecución del mismo con un sistema de computación. Una vez establecido el diagrama de flujo, es entonces necesario darle al computador las instrucciones para que efectúe las operaciones allí planteadas. Esto se hace mediante los llamados *lenguajes de programación*.

*Un lenguaje de programación es un conjunto de instrucciones que permiten a un computador realizar una tarea específica. Al conjunto de instrucciones escritas en un lenguaje de programación se le denomina **programa**.*

En el pasado se han desarrollado varios *lenguajes de programación* que facilitan la comunicación hombre-máquina. El llamado *lenguaje de máquina* es realmente el único lenguaje que entiende un computador. Este lenguaje está íntimamente asociado con los componentes electrónicos que integran al mismo. En otras palabras, los circuitos lógicos que lo conforman sólo responden a instrucciones en lenguaje de máquina. Las instrucciones, en este caso, son conjuntos de unos y ceros que indican a la máquina la tarea a realizar. El lenguaje de máquina varía de computador a computador y por tanto, los programas que lo usan son útiles para el computador para el cual se desarrolló. La programación en este lenguaje es complicada y difícil de ser analizada por un usuario no experimentado.

En especial, los llamados sistemas operativos que controlan el hardware del computador, están escritos en lenguaje de máquina. Entre los sistemas operativos más usados se encuentran el MSDOS, UNIX y WINDOWS.

Para evitar los problemas asociados con el lenguaje de máquina, se desarrollaron los llamados lenguajes de alto nivel. Entre esos lenguajes podemos mencionar algunos de los que han alcanzado mayor difusión: **FORTRAN, BASIC, PASCAL, COBOL, ALGOL, PL/1 y C**. Los lenguajes de alto nivel reúnen las siguientes características:

1. Sus instrucciones se parecen a las que ordinariamente utilizaría una persona para ordenar la realización de una acción. Así por ejemplo, instrucciones típicas son: WRITE (escribe), PRINT (imprime), READ (lee).

2. Son realmente independientes de la máquina que se utiliza. Sólo se requieren modificaciones pequeñas para "correr" los programas en distintos computadores.

Generalmente, las instrucciones de los distintos lenguajes están escritas en idioma inglés ("GO TO", "FOR", "NEXT", etc.).

Como los computadores sólo entienden el lenguaje de máquina, es necesario utilizar un programa especial llamado *compilador*, que traduzca los lenguajes de alto nivel a lenguaje de máquina.

28.2 INSTRUCCIONES Y OPERACIONES ELEMENTALES DEL LENGUAJE BASIC

El lenguaje BASIC utiliza una serie de instrucciones entre las cuales se encuentran las siguientes:

PRINT	FOR...NEXT	CLS
INPUT	GO TO	END
READ	IF...THEN	REM

A fin de efectuar operaciones aritméticas, el computador utiliza la siguiente simbología:

Adición:	+	3 + 4
Sustracción:	–	100 – 30
Multipliación:	*	7 * 13
División:	/	27/3
Potenciación:	↑	5 ↑ 3

28.3 INSTRUCCIÓN CLS

Esta instrucción ordena al computador borrar la pantalla para comenzar a escribir nuevas instrucciones. Para usarla, simplemente se escribe CLS y se oprime la tecla *Return* o *Enter*, que posee todo computador. Cuando se comienza a escribir un nuevo programa, es conveniente usar esta instrucción para "limpiar" la pantalla.

28.4 INSTRUCCIÓN PRINT

Esta instrucción le ordena al computador escribir algo en la pantalla; tiene muchas variantes que determinan lo que el computador presenta en la pantalla. Por

ejemplo, la instrucción:

```
PRINT "ERNESTO"
```

coloca el nombre ERNESTO inmediatamente después que se ha escrito la instrucción y se ha oprimido la tecla "Return", representado en este libro, por el símbolo ↵. En la pantalla se observa lo siguiente:

Ok
PRINT "ERNESTO"
ERNESTO
Ok

Este símbolo indica
que se ha presionado
la tecla "Return".

La palabra **Ok** en la pantalla significa que el computador ha realizado las instrucciones pedidas y puede iniciarse un nuevo ciclo de instrucciones. Observa que la palabra ERNESTO está encerrada entre comillas. Otros mensajes que puedes hacer que el computador escriba en la pantalla podrían ser:

```
PRINT "DEBO MANTENER LIMPIA MI ESCUELA"
```

La pantalla del computador muestra:

Ok
PRINT "DEBO MANTENER LIMPIA MI ESCUELA"
DEBO MANTENER LIMPIA MI ESCUELA
Ok

Si se comete un error al escribir la palabra PRINT, el computador da un mensaje de error de sintaxis que le indica al usuario que debe escribir de nuevo la instrucción. Por ejemplo, si se escribe:

```
PRIN "HOLA"
```

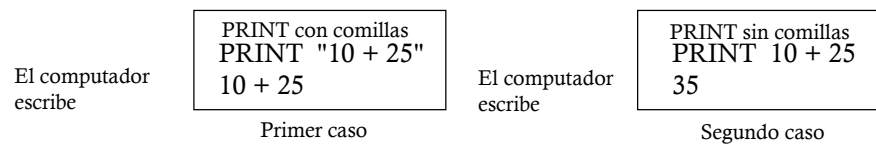
se observará en la pantalla:

PRIN "HOLA" ↵
Syntax error

← Debe ser PRINT
← error de sintaxis

La forma anterior de impresión en pantalla se llama instrucción de impresión directa, ya que el computador escribe lo que se le ordena inmediatamente después del comando de impresión PRINT. En el caso de que el error sea advertido antes de ordenar la ejecución de la instrucción, es decir, antes de oprimir la tecla "Enter" o "Return", puedes hacer la corrección usando la tecla de retroceso ("Backspace") que tiene el computador.

Comparemos ahora qué sucede si usamos la instrucción PRINT sin comillas. Consideremos los dos casos siguientes:



En el primer caso, PRINT "10 + 25", el computador escribe en la pantalla exactamente lo que aparece entre comillas. Es decir, escribe 10 + 25 sin efectuar la adición. En el segundo caso, el computador realiza la adición 10 + 25 y escribe el resultado 35 en la pantalla. Otros ejemplos podrían ser:

Programa	Lo que escribe el computador en la pantalla
PRINT "39 – 13"	39 – 13
PRINT 39 – 13	26
PRINT 18 * 3	54
PRINT "5 * 8"	5 * 8
PRINT 7 ↑ 2	49

Operaciones aritméticas combinadas con PRINT

El computador puede realizar operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Cuando estas combinaciones se producen, se efectúan en orden prioritario las operaciones de potenciación, multiplicación-división y adición-sustracción. En el caso de multiplicación y división, es independiente cuál se realiza primero. Lo mismo ocurre en el caso de adición y sustracción. Veamos algunos ejemplos:

Instrucción	Pantalla	Explicación
PRINT 3 * 5 + 7	22	$3 \cdot 5 + 7 = 15 + 7 = 22$
PRINT 100 - 3 * 10	70	$100 - 3 \cdot 10 = 100 - 30 = 70$
PRINT 105/15	7	$105 \div 15 = 7$
PRINT 105/15 + 12	19	$105 \div 15 + 12 = 7 + 12 = 19$
PRINT 23 - 42/6	16	$23 - 42 \div 6 = 23 - 7 = 16$
PRINT 2 ↑ 3 - 5	3	$2^3 - 5 = 8 - 5 = 3$
PRINT - 2 ↑ 4 + 48/3	0	$- 2^4 + 48 \div 3 = - 16 + 16 = 0$
PRINT (- 2) ↑ 4 - 15	1	$(- 2)^4 - 15 = 16 - 15 = 1$

Cuando una expresión contiene paréntesis, se realizan primero las operaciones encerradas en los paréntesis más internos. Así:

$$\begin{aligned}
 \text{PRINT } 2 * (2 * 5 - 7 * (8/4 - 3)) &\Rightarrow 2 * (2 * 5 - 7 * (2 - 3)) \\
 &2 * (2 * 5 - 7 * (-1)) \\
 &2 * (2 * 5 + 7) \\
 &2 * (10 + 7) \\
 &2 * 17 = 34
 \end{aligned}$$

◆ EJERCICIOS

28.1 Escribe un pequeño programa que te permita borrar la pantalla y escribir *mis profesores merecen respeto*.

28.2 Establece cuál será la respuesta en la pantalla a las instrucciones siguientes:

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------|
| a) CLS
PRINT "HAY QUE ESTUDIAR" | b) PRINT 18 + 12 |
| c) PRINT "15 - 24" | d) PRINT 15 - 24 |
| e) PRINT "5 * 16" | f) PRINT 5 * 16 |
| g) PRINT - 5 * 2,3 | h) PRINT "- 12 * 10" |
| i) PRINT 3 * 4 + 6 | j) PRINT - 11 * 5 - 7 |
| k) PRINT 50 - 3 * 8 | l) PRINT 56/7 + 1 |
| m) PRINT 4 * (5 - 4 * (6 - 10/2) + 8) | n) PRINT 2 ↑ 5 - 30 |
| o) PRINT 26/13 - 4 * 8 + 9 | p) PRINT 17 - 24/8 |

28.5 PROGRAMACIÓN ELEMENTAL EN LENGUAJE BASIC

La instrucción PRINT que hemos estudiado es una instrucción de ejecución inmediata. Por ejemplo, si escribiáramos PRINT "¿HAS ESTUDIADO HOY?", en la pantalla del computador aparece:

```
PRINT "¿HAS ESTUDIADO HOY?" ↵
¿HAS ESTUDIADO HOY?
```

Es decir, la respuesta aparece inmediatamente después de la instrucción. La forma más usual de presentar un programa de computación corresponde al formato:

```
10 CLS
20 PRINT "HOLA LUIS"
30 GO TO 20
```

En el programa anterior hay 3 instrucciones: CLS, PRINT y GO TO 20. Todas las instrucciones están precedidas por un número. A tales números se les denominan números de línea. Cuando el computador detecta la presencia de líneas numeradas, no efectúa la operación inmediatamente, sino que almacena cada instrucción numerada en su memoria para efectuarlas cuando se le ordena posteriormente. Las instrucciones a las cuales no se les asigna números de línea no se almacenan en la memoria del computador. Los números de línea del programa anterior son 10, 20 y 30.

Como puedes ver, estos números están colocados en orden creciente. Esta secuencia siempre debe ser mantenida, ya que la misma indica el orden en el cual el computador efectúa las operaciones que se le piden.

Los números de línea deben separarse convenientemente. Entonces, es preferible que el orden sea 10, 20, 30, ... y no 10, 11, 12, 13, ... Este último orden no permite intercalar líneas adicionales entre una y otra instrucción. En el primer caso, 10, 20, 30, ..., si el programador necesita intercalar una instrucción entre las líneas 10 y 20, simplemente le asigna un número entre 10 y 20, digamos 12, a la nueva instrucción. Veamos qué operaciones realiza el programa anterior:

Primera línea	10 CLS	(Borra la pantalla)
Segunda línea	20 PRINT "HOLA LUIS"	(Ordena imprimir HOLA LUIS)
Tercera línea	30 GO TO 20	(Ordena ir a la línea 20)

La instrucción GO TO 20 (en español, "vaya a 20") indica al computador dirigirse a la línea 20. La instrucción GO TO siempre va acompañada de un número que indica cuál instrucción debe ejecutarse después del GO TO.

Si las instrucciones numeradas no son de ejecución directa, ¿cómo sabe el computador cuándo debe efectuar el programa? Para ello es necesario añadir al final del mismo la instrucción RUN y oprimir la tecla ENTER o RETURN. El pequeño programa anterior puede entonces escribirse como:

```
10 CLS
20 PRINT "HOLA LUIS"
30 GO TO 20

RUN
```

La palabra inglesa RUN significa en castellano "correr". En el argot de computación, "correr un programa" significa ordenar al computador que realice las instrucciones contenidas en el mismo. "Correr un programa" es equivalente a "ejecutar un programa".

Veamos ahora qué hace el programa anterior. Al oprimir RETURN se suceden los siguientes pasos:

1. El computador "limpia" la pantalla. (CLS)
2. Escribe HOLA LUIS.
3. Como la instrucción 30 ordena ir a la línea 20, el computador escribe HOLA LUIS y pasa a la línea 20 nuevamente.
4. El ciclo se repite indefinidamente y en la pantalla del computador se observa:

```
HOLA LUIS
HOLA LUIS
HOLA LUIS
HOLA LUIS
.
.
.
```

El caso anterior es un ejemplo de un *bucle o lazo* que obliga al computador a imprimir lo mismo indefinidamente llenando la pantalla con el mismo mensaje.

Un diagrama de flujo correspondiente al programa anterior se muestra en la fig. 28.1. Se trata en este caso de un diagrama sin la instrucción FIN que termina el programa.

¿Cómo haremos para modificar el programa anterior a fin de evitar que se llene la pantalla con el mensaje HOLA LUIS? Una solución es la siguiente:

```
10 CLS
20 PRINT "HOLA LUIS"
30 GO TO 10
RUN ↵
```

La línea 30 del programa modificado devuelve la ejecución del mismo a la línea 10 y no a la línea 20. Esto significa que el computador al llegar a la instrucción CLS, borra la pantalla antes de escribir HOLA LUIS. Aun cuando se produce también el bucle de ejecución permanente, éste resulta en un borrado repetitivo de la pantalla y no en la escritura repetida de HOLA LUIS.

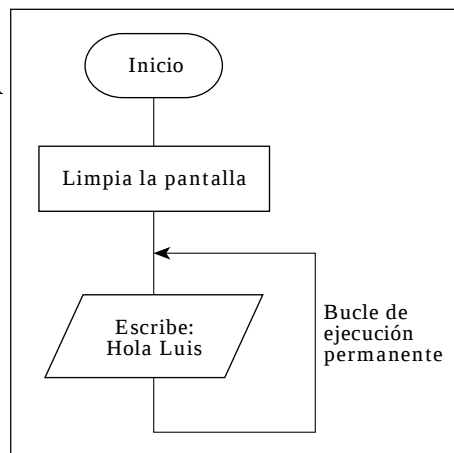


Fig. 28.1 Diagrama de flujo sin la instrucción FIN.

¿Cómo detenemos la aparición del mensaje HOLA LUIS? Esto depende del tipo de computador. En algunos, la tecla "BREAK" detiene la ejecución del programa. En otros, la combinación de teclas Control-Scroll Lock detiene la ejecución.

Dijimos anteriormente que cuando se numeran las líneas de un programa, éste es almacenado en la memoria del computador. Para asegurarnos que es así, escribe:

```
CLS ↵   Borra la pantalla
LIST ↵   Muestra una lista del programa
```

Cuando se oprime "Return", la pantalla muestra:

```
CLS
LIST
10 CLS
20 PRINT "HOLA LUIS"
30 GO TO 10
Ok
```

Entonces,

La instrucción LIST presenta en pantalla el programa que reside en la memoria del computador.

Supongamos ahora que queremos iniciar un nuevo programa. Lo primero que tenemos que hacer es indicarle al computador, mediante la instrucción NEW, que borre el programa anterior de la memoria.

La instrucción NEW borra el programa residente en la memoria del computador y lo dispone para recibir un nuevo programa.

28.6 INSTRUCCIONES FOR... NEXT Y END

Considera ahora que se desea escribir sólo 5 veces la frase HOLA PATRICIA. El programa podría ser:

```
NEW ↵
10 FOR I = 1 TO 5
20 PRINT "HOLA PATRICIA"
30 NEXT I
40 END
RUN ↵
```

- Borra el programa anterior
- Inicia el ciclo de 1 a 5
- Imprime HOLA PATRICIA
- Fin de cada ciclo
- Termina el programa

La instrucción 10 FOR I = 1 TO 5 (en español: "para valores de I que van desde 1 hasta 5"), comienza un ciclo que se inicia en I = 1 y termina en I = 5. Esta instrucción termina en la línea 30 NEXT, que le indica al programa que incremente el próximo valor de I en 1. Este ciclo se repite hasta que se alcance el valor I = 5, en cuyo caso se pasa a la línea 40, donde se instruye al programa para que se detenga. La pantalla muestra entonces el siguiente resultado:

```
NEW ↵
10 FOR I = 1 TO 5
20 PRINT "HOLA PATRICIA"
30 NEXT I
40 END
RUN ↵
```

```
HOLA PATRICIA
HOLA PATRICIA
HOLA PATRICIA
HOLA PATRICIA
HOLA PATRICIA
```

◆ EJERCICIOS

Escribe programas en BASIC que realicen las operaciones descritas.

28.3 El programa debe borrar la pantalla y escribir indefinidamente:

ES CONVENIENTE ESTUDIAR TODOS LOS DIAS.

28.4 Inicialmente se debe borrar cualquier programa residente en la memoria y luego deben escribirse los mensajes:

PARA DOMINAR EL
CONOCIMIENTO, DEBO
ESTUDIAR CON CONSTANCIA

28.5 Se debe borrar cualquier programa residente en la memoria, borrar la pantalla y escribir 4 veces:

NUESTROS PROFESORES MERECE SER RESPETADOS

28.6 ¿Qué hace el siguiente programa?:

```
10 CLS
20 PRINT "BUCLE LIMITADO"
30 FOR I = 1 TO 5
40 PRINT "SIEMPRE DEBO LEER CON DETENIMIENTO"
50 NEXT I
60 END
```

28.7 ¿Qué hace el siguiente programa?:

```
NEW
10 FOR I = 1 TO 5
20 PRINT 4 * 2 - 5
30 PRINT "¿ENTENDISTE?"
40 NEXT I
50 END
```

28.7 CONSTANTES

En el lenguaje de la informática se denominan constantes *los valores que no cambian durante la ejecución de un programa*. Así, por ejemplo, en la fórmula del área del círculo:

$$A = \pi r^2$$

π es una constante igual a 3,1416. Podemos distinguir dos tipos de constantes:

a) *Constantes numéricas*: pueden a su vez ser enteras o reales.

Ejemplos de constantes numéricas enteras: 18, -4, -35, 102

Ejemplos de constantes numéricas reales: -2,38; 1,17; 2/3; -1/7

Hay que hacer notar que en computación **la coma decimal se le sustituye por un punto**. Así,

-2,38 se representa por 2.38

1,17 se representa por 1.17

De no hacerse de esta forma, la computadora nos daría un error de escritura.

b) *Constantes alfanuméricas*: están formadas por combinaciones de caracteres numéricos y no numéricos. A las constantes alfanuméricas se les encierra entre comillas. Como ejemplos de constantes alfanuméricas tenemos:

"Area del círculo"

"Luis y Jacinto"

28.8 VARIABLES

Variables son aquellos valores que cambian durante la ejecución de un programa. Al igual que las constantes, las variables pueden ser numéricas y alfanuméricas. Las variables numéricas adquieren siempre valores numéricos y su designación siempre comienza por una letra. Ejemplos de designación de variables numéricas son:

A = 4 B32 = -0,8

Las variables alfanuméricas están formadas por una sucesión de caracteres y se representan por una letra seguida del símbolo \$. La sucesión de caracteres que representa a la variable alfanumérica, debe estar encerrada entre comillas. Ejemplos de representación de variables alfanuméricas son:

A\$ = "Area" B\$ = "AZUL" NOMBRE\$ = "ROCO"

Como un ejemplo de aplicación de los conceptos anteriores, considera el siguiente programa:

```
10 CLS ↵
20 A$ = "HOLA AMIGO"
30 PRINT A$;
40 GO TO 30
RUN ↵
```

→ Se limpia la pantalla
 → Se asigna el valor "HOLA AMIGO"
 → Imprime "HOLA AMIGO"
 → Se va a la línea 30

Cuando se corre el programa anterior, se llena la pantalla con el mensaje "HOLA AMIGO" de la forma siguiente:

HOLA AMIGO	HOLA AMIGO	HOLA AMIGO
HOLA AMIGO	HOLA AMIGO	HOLA AMIGO
HOLA AMIGO	HOLA AMIGO	HOLA AMIGO
HOLA AMIGO	HOLA AMIGO	HOLA AMIGO
HOLA AMIGO	HOLA AMIGO	HOLA AMIGO

Como puedes notar, en la fila 30 se incluye la instrucción PRINT A\$ seguido de un punto y coma (;). Es esta instrucción (PRINT A\$;) la que hace que la pantalla se llene tanto horizontal como verticalmente con el mensaje "HOLA AMIGO".

Considera el siguiente programa:

NEW	Borra la memoria
10 CLS	Borra la pantalla
20 FOR I = 1 TO 5	Se comienza un bucle con la variable numérica I
30 R = I	La variable numérica R se hace igual a la variable numérica I
40 A\$ = "EL ÁREA DEL CÍRCULO ES: "	La variable alfanumérica A\$ se hace igual a "EL AREA DEL CIRCULO ES"
50 AREA = 3,1416 * R ↑ 2	Se calcula el valor del área del círculo para cada valor de R
60 PRINT A\$; AREA	Imprime el valor del área del círculo
70 NEXT I	Se transfiere la ejecución hasta la línea 20
80 END	Finaliza la ejecución
RUN	

Observa nuevamente el punto y coma en la línea 60. Esto indica que los valores de A\$ ("EL ÁREA DEL CIRCULO ES") y de AREA (el valor calculado), se imprimen de seguido. En la pantalla se verá:

```
EL ÁREA DEL CIRCULO ES: 3.1416
EL ÁREA DEL CIRCULO ES: 12.5664
EL ÁREA DEL CIRCULO ES: 28.2744
EL ÁREA DEL CIRCULO ES: 50.2656
EL ÁREA DEL CIRCULO ES: 78.5400
```

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

1.1 a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{8}{25}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{4}$ f) $-\frac{87}{40}$ g) $-\frac{29}{25}$ h) $\frac{21}{8}$

1.2 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{10}{99}$ c) $\frac{34}{33}$ d) $-\frac{25}{99}$ e) $\frac{38}{33}$ f) $\frac{25}{9}$ g) $-\frac{25}{11}$ h) $\frac{94}{99}$

1.3 a) $\frac{23}{90}$ b) $\frac{29}{90}$ c) $\frac{11}{900}$ d) $\frac{73}{225}$ e) $\frac{143}{90}$ f) $-\frac{11.617}{4.950}$ g) $\frac{67}{90}$ h) $\frac{1.457}{450}$

1.4 a) Racional b) Irracional c) Irracional d) Irracional e) Irracional f) Irracional

1.5 a) 5, racional b) $\sqrt{85}$, irracional c) $\sqrt{504}$, irracional

2.1

	N	Z	Q	I	R
-8	∉	∈	∈	∉	∈
17	∈	∈	∈	∉	∈
$\frac{5}{7}$	∉	∉	∈	∉	∈
$-\frac{1}{9}$	∉	∉	∈	∉	∈
$1,6\overline{2}$	∉	∉	∈	∉	∈
$\sqrt{7}$	∉	∉	∉	∈	∈
6	∈	∈	∈	∉	∈
$-\pi$	∉	∉	∉	∈	∈
$3,64$	∉	∉	∈	∉	∈
$-2,\overline{7}$	∉	∉	∈	∉	∈

2.2

	3	-2	$-1/3$	$-\sqrt{2}$	-4,18	$\pi/2$
Q	∈	∈	∈	∉	∈	∉
I	∉	∉	∉	∈	∉	∈

2.3

	R	Q	Z	N	I
11,24	∈	∈	∉	∉	∉
-22	∈	∈	∈	∉	∉
$\sqrt{32}$	∈	∉	∉	∉	∈
$-0,\overline{18}$	∈	∈	∉	∉	∉

2.4 a) N b) N^+ c) N d) ϕ e) I f) ϕ g) ϕ h) R i) Z j) Z k) Z^+ l) Q^*

2.5 a) Defecto: 3,1 , Exceso: 3,2 b) Defecto: 3,18 , Exceso: 3,19

c) Defecto: 3,182 , Exceso: 3,183

2.7 a) Décimas: Defecto: 0,3 Centésimas: Defecto: 0,31
Exceso: 0,4 Exceso: 0,32

b) Milésimas: Defecto: 1,772 , Exceso: 1,773

2.8 a) Defecto b) Exceso c) Defecto d) Exceso e) Exceso
f) Defecto g) Exceso h) Defecto i) Defecto j) Exceso

3.1 a) Aproximación: 1,22 Exacto: $\frac{49}{40}$ b) Aproximación: 2,08 Exacto: $\frac{25}{12}$

c) Aproximación: 1,35 Exacto: $\frac{27}{20}$

3.2 a) 1,47 b) 1,79 c) 4,99

3.3 a) -1,028 b) 0,167 c) 0,819

3.4 a) $-\sqrt{17}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{1}{7}$ d) 0,1736...

4.1 a) Exacta = $\frac{7}{12}$ Aprox. por defecto: 0,583 Aprox. por exceso: 0,584

b) Exacta = $-\frac{157}{36}$ Aprox. por defecto: -4,361 Aprox. por exceso: -4,362

c) Exacta = $\frac{149}{450}$ Aprox. por defecto: 0,331 Aprox. por exceso: 0,332

4.2 a) 3,363 b) -1,425 c) 0,879

4.3 a) -5,5679 b) -16,7328 c) 1,2244

4.4 a) $S = 10,9107$ Distributiva, elemento neutro.

b) $S = 2,8284$ Elemento neutro.

c) $S = -4,8032$ Distributiva, elemento simétrico, elemento neutro, asociativa.

d) $S = -4,3829$ Distributiva.

4.5 a) 1,813 b) -0,551 c) $\frac{1}{2}$ d) -29,577 e) 0,101 f) -0,262

5.1 a) 343 b) 11,179 c) 9,865 d) 1,314 e) 0,128 f) -0,182

5.2 a) -243 b) 81 c) -42,464 d) -0,828 e) 0,568

5.3 a) $-\frac{3}{4}$ b) π c) $\frac{1}{(\sqrt{2}+7)}$

5.4 a) π^5 b) $\frac{1}{\pi^6}$ c) $\frac{1}{(a+b)^3}$ d) $(\sqrt{11}-\sqrt{3})^{18}$ e) $(\sqrt{6}-\pi)$

5.5 a) $\frac{3^6}{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ c) $\frac{1}{(\sqrt{11}-2)}$ d) 1

5.6 a) a^6b^9 b) $\frac{c^6}{a^4b^{10}}$ c) $\frac{\pi^4}{25}$ d) $\frac{1}{m^5n^5}$ e) $-\frac{3}{49}$ f) $(-3)^{2a}$

5.7 a) $(mn^2y^3)^5$ b) $2(2xy^2)^4$ c) $(\sqrt{3}\pi^2y^{-4})^{-2}$

5.8 a) 75 b) $\frac{12^3\pi^3}{5^6}$ c) $(1-\pi)^6$ d) $\frac{b^3c^{10}}{a^7}$ e) 1

5.9 a) $\frac{1}{y^3}$ b) $\frac{x^2a^3}{y^2z^4}$ c) $\frac{a^2x}{by^3z}$ d) $\frac{5y^{10}}{x^2z^4}$ e) $\frac{xy}{x+y}$ f) $\frac{y^2-x^2}{yx}$

6.1 a) ± 8 b) ± 5 c) ± 11 d) $\pm \frac{5}{7}$

6.2 a) 19 b) -2 c) $\pm \frac{13}{10}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{4}$

6.3 a) Raíz cuadrada de once b) Raíz séptima de veintiuno
c) Raíz n-ésima de ocho d) Raíz sexta de dos por a a la décima potencia

6.4 a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[5]{104}$ c) $\sqrt[n]{2x}$ d) $\sqrt[10]{5x^4}$

6.5 a) 1 b) -1 c) 5 d) 4 e) -4 f) $\notin \mathbf{R}$
g) $\notin \mathbf{R}$ h) a i) -2,8438... j) 1,1040... k) $\notin \mathbf{R}$ l) 1,5130...

6.6 a) $10x^2$ b) $\sqrt[3]{-126}$ c) $(x+y)^2$ d) $-15x^2\sqrt{2x}$

6.7 a) x^3 b) a^3 c) $a^2\sqrt{b}$ d) $\frac{1}{(x+y)^2}$ e) $\sqrt{\frac{19}{11}}$ f) $-4x\sqrt{3x}$

6.8 a) $\sqrt{x}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{x^3}{2}$ e) $\frac{(x-y)}{\sqrt{x+y}}$ f) $(x-y)$

6.9 a) $\sqrt[5]{7}$ b) $\sqrt{3}$ c) x

- 6.10** a) $\sqrt{yx^2}$ b) $\sqrt[3]{8a^2b}$ c) $\sqrt{2x^2y^2}$ d) $\sqrt[5]{3^5a^5x^2}$
- 6.11** a) $a^5\sqrt[3]{a}$ b) $xy^2\sqrt[5]{x^3}$ c) $(a+b)^3x\sqrt{(a+b)x}$
- 6.14** a) $\sqrt[4]{18}$ (m.c.i. = 4) b) $y\sqrt[30]{x^{27}y^3a^{20}b^{10}}$ (m.c.i. = 30)
- 6.15** a) $\sqrt[6]{5^27^3}$ b) $\sqrt[21]{a^{17}b^{17}}$ c) $x\sqrt[4]{x^3}$ d) $\sqrt[12]{a^5}$
- 7.1** a) $x^{9/2}$ b) $a^{3/7}$ c) $a^{1/3}b^{2/3}$
- 7.2** a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[5]{a^4}$ c) $\frac{1}{\sqrt[10]{2^3}}$
- 7.3** a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}y}$ b) $a\sqrt[6]{a^5}$ c) $\frac{1}{a\sqrt[4]{a^3b^2}}$
- 7.4** a) $\frac{1}{y\sqrt{a^2y^2}}$ b) x^5y^5 c) $\frac{a}{b\sqrt[3]{b}}$
- 7.5** a) $xy^2\sqrt[6]{x^4y}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ c) $\sqrt[12]{(a+b)^{13}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[8]{x}\sqrt[6]{y}}$ e) $\frac{\sqrt[20]{a^{14}b^{13}}}{\sqrt[6]{x}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$
- 7.6** a) Si b) No c) No d) Si
- 7.7** a) 0 b) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ c) $2x\sqrt[5]{x^2}$ d) $-\frac{37}{2}\sqrt{5}$
- 8.1** a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2x}}{2}$
 e) $\frac{x^2y^2}{4\sqrt{xy}}$ f) $\frac{\sqrt{xy}}{2xy}$ g) $\frac{\sqrt{xy}}{y}$ h) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}}$
- 8.2** a) $\frac{2+2\sqrt{x}}{1-x}$ b) $-\frac{1}{5\sqrt{3}+10}$ c) $\frac{30\sqrt{2}+18}{41}$
 d) $\frac{x-8}{2\sqrt{x+1}+6}$ e) $\frac{28+12\sqrt{2}}{31}$ f) $\frac{2x-18}{3\sqrt{x}+9}$
- 8.3** a) $\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$ b) $-\frac{2x-3\sqrt{x+1}+3}{x}$ c) $\frac{6+4\sqrt{1-x}}{5+4x}$
 d) $\frac{26\sqrt{3}-39}{39}$ e) $\frac{x+2\sqrt{2x+4}+4}{x}$ f) $-\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{3}$
- 9.1** $\pi \geq 3 \geq \sqrt{7} \geq 0 \geq -1 \geq -\sqrt{5} \geq -4$
- 9.2** $-7 \leq -\pi \leq -3 \leq -\sqrt{2} \leq 1 \leq 3$

- 9.4 a) Falsa b) Verdadera c) Verdadera d) Falsa
e) Verdadera f) Verdadera g) Verdadera h) Verdadera
- 9.5 a) < b) > c) > d) < e) > f) <
- 9.6 a) $2 \geq 0,414$ b) $-3,732 \leq -0,586$ c) $-1,072 < 20$
d) $2 \geq -1,414$ e) $7,070 > 5$
- 10.1 a) $-7,59$ b) -6 c) $15,46$ d) $3,32$ e) -14 f) $1,77$
- 10.2 a) Verdadera b) Verdadera c) Falsa d) Verdadera
e) Verdadera f) Falsa g) Verdadera h) Verdadera
i) Verdadera j) Falsa k) Falsa l) Verdadera
- 10.3 a) $x = 2$; $x = -2$ b) $x = \frac{38}{3}$; $x = 4$ c) $x = 3\sqrt{3} + 19$; $x = 3\sqrt{3} - 19$
d) $x = \frac{15}{2}$; $x = \frac{13}{2}$ e) $x = \frac{8}{5}$; $x = -\frac{26}{5}$ f) $x = 11$; $x = \frac{5}{3}$
g) $x = -6$; $x = 4$ h) $x = \frac{2}{9}$; $x = -\frac{10}{9}$ i) $x = 1$; $x = -\frac{43}{5}$
j) $x = \frac{7}{11}$; $x = \frac{1}{3}$ k) $x = \frac{9}{4}$; $x = -\frac{12}{11}$ l) $x = \frac{12}{13}$; $x = 0$
- 11.2 a) $P_1(-1)$ Abscisa de P_1 : -1 b) $P_2(0,5)$ Abscisa de P_2 : $0,5$
c) $P_3\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ Abscisa de P_3 : $\sqrt{\frac{5}{2}}$ d) $P_4(-\sqrt{3})$ Abscisa de P_4 : $-\sqrt{3}$
- 13.1 a) $[0, 4]$ b) $[-2, 2]$ c) $[-\pi, 0]$ d) $[-\sqrt{5}, \sqrt{7}]$
- 13.2 a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq -1\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x \leq 0\}$ c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$
- 13.3 a) $(0, 4)$ b) $(-2, 2)$ c) $(-\pi, 0)$ d) $(-\sqrt{5}, \sqrt{7})$
- 13.4 a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x < -1\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x < 0\}$ c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$
- 13.5 $20 \leq V \leq 24$
- 13.6 a) $(0, 3]$ b) $[-3, 0)$ c) $[-\sqrt{2}, 1)$ d) $[0, 2]$
- 13.8 a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x < \infty\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < -2\}$ c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$
- 13.9 a) Falsa b) Falsa c) Verdadera d) Verdadera e) Verdadera
f) Verdadera
- 13.10 a) Verdadera b) Falsa c) Falsa d) Verdadera

- 13.11** a) $(-\infty, 1)$ b) $[-2, \pi)$ c) $(-1, \infty)$ d) $[-3, 4]$
- 13.12** a) $[-2, 0)$ b) $(-1, 3]$ c) $(0, 1)$ d) $(-3, 4)$
- 14.1** a) $x \geq -2$ b) $x \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $x > -\frac{19}{7}$ d) $x \geq \pi$
- 14.2** a) $x < \frac{9}{8}$ b) $x \geq 3$ c) $x \leq 5$ d) $x > -2$ e) $x \geq \sqrt{7} - 1; x \leq -\sqrt{7} - 1$ f) $x > -1$
- 14.3** a) $x \geq -5$ b) $x \leq \frac{4}{3}$ c) $x \geq \frac{1}{3}$
- 14.4** a) $(-3, 3)$ b) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ c) $[-\frac{3}{5}, 3]$
 d) $(-\infty, \infty)$ e) $[\frac{5}{4}, \frac{15}{4}]$ f) $(-8, 4)$
- 14.5** a) $(-\infty, -\pi - \sqrt{2},] \cup [\pi - \sqrt{2}, \infty)$ b) $\frac{3}{10} \leq x \leq \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$
 d) $\frac{5}{4} < x < \frac{31}{12}$ e) $x > \frac{1}{4}$ f) $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [9, \infty)$
- 14.6** a) $1 < x < 6$ b) $x \leq 3$ c) $(-2, 2]$
- 14.7** a) $(-\infty, -2]$ b) $(0, 8)$ c) $(-\frac{1}{2}, 2]$
- 14.8** $r \leq \sqrt{\frac{10}{\pi}}$ **14.9** $1 > \frac{3}{2}$ **14.10** $h < \frac{40}{3}$
- 14.11** $20 \leq t \leq 34$ **14.12** $x = 12$
- 15.5** a) Rectángulo b) Rectángulo c) Rombo **15.7** Pto. Intersección: $(2, 1)$
- 15.8** a) $\sqrt{34}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{52}$ e) 4 f) 8
- 15.9** Perímetro: 13,83 Área: 7,50 **15.10** Perímetro: 10,33; Escaleno
- 15.11** $d_{BC} = 6,08$; $d_{AD} = 5$ (Cuadrilátero)
- 16.1** $D_f = \{-2, 0, 5, 3\}$; $R_f = \{-5, -1, 9, 5\}$
- 16.2** a) $D_y: (-\infty, 2]$ $R_y: \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ b) $D_y: [-\frac{3}{2}, \infty)$ $R_y: \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
 c) $D_y: (-\infty, 4]$ $R_y: \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
- 16.3** a) $D_y: \mathbf{R} - \{1\}$ $R_y: \mathbf{R}^*$ b) $D_y: \mathbf{R}$ $R_y: [3, \infty)$ c) $D_y: \mathbf{R} - \{2, 3\}$ $R_y: \mathbf{R}^*$

17.1 a) $m = 2, y = 3$ b) $m = -2, y = -1$ c) $m = -\frac{1}{5}, y = 4$ d) $m = 0, y = 3$

e) $m = 0, y = -1$ f) $m = 1, y = 1$

17.2 a) Obtuso; $m = -5; b = 3$ b) Agudo; $m = \frac{3}{4}; b = 1$

c) 0° ; $m = 0; b = 5$ d) Agudo; $m = 2; b = -4$

e) Obtuso; $m = -1; b = \frac{1}{3}$ f) 90° ; $m \rightarrow \infty$; *no hay corte*

17.3 a) Pertenece b) No pertenece c) Pertenece

17.4 a) $m = \frac{3}{2}$ b) $m = 5$ c) $m = -3$

17.5 a) $m = \frac{3}{2}$ b) $m = -\frac{1}{4}$

17.6 a) $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ b) $y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$ c) $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}$

17.7 a) $m = \frac{5}{2}; b = \frac{1}{4}$ b) $m = \frac{2}{5}; b = 0$ c) $m = -\frac{1}{18}; b = \frac{1}{4}$

17.8 a) $3x - y = 0$ b) $x + 3y - 1 = 0$ c) $x + y + 3 = 0$ d) $6x + 12y + 5 = 0$

17.9 a) $x - y + 1 = 0$ b) $3x - y + 3 = 0$ c) $6x - 7y + 18 = 0$ d) $2x - y = 0$

17.10 a) Paralelas b) Secantes; $P(-\frac{1}{6}, \frac{3}{2})$

17.11 a) no b) no

18.1 a) $(1, 3)$ b) $(4, 2)$ c) $(\frac{6}{5}, -\frac{18}{5})$ d) $(0, 0)$ e) $(2, 6)$ f) No tiene solución

18.2 a) $(-1, -1); (-2, -4)$ b) $(1, 2); (-1, -2)$

18.3 a) Incompatible b) $(\frac{17}{5}, -\frac{8}{5})$ c) Incompatible

d) $(-\frac{9}{5}, -\frac{4}{5})$ e) $(-1, 3)$ f) $(4, 2)$

g) Incompatible h) $(-10, 2)$ i) Incompatible

18.4 a) $(2, 8)$ b) $(4, 7)$ c) Incompatible

d) $(\frac{1}{3}, 3)$ e) $(-4, \frac{11}{3})$ f) $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

g) $(-\frac{1}{13}, \frac{4}{13})$ h) $(-\frac{7}{9}, -\frac{20}{9})$ i) $(0, 0)$

18.5 a) $(15, 5)$ b) $\left(\frac{13}{18}, \frac{7}{3}\right)$ c) $\left(\frac{149}{90}, \frac{23}{15}\right)$ d) $\left(\frac{11}{17}, -\frac{609}{187}\right)$

18.6 a) $(2, 4)$ b) $(4, 2)$ c) $(10, 2)$

d) $(-3, 7)$ e) $\left(-\frac{39}{17}, \frac{26}{17}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}\right)$

g) $(17, 7)$ h) Incompatible i) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

18.7 a) $\left(\frac{14}{11}, \frac{2}{11}\right)$ b) $(3, 1)$ c) $(3, 3)$

d) $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$ e) $\left(\frac{28}{11}, -\frac{3}{11}\right)$ f) $\left(\frac{489}{384}, \frac{23}{64}\right)$

18.8 a) $(2, -2)$ b) $\left(\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right)$ c) $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) $(-2, 3)$ e) $\left(\left(\frac{m+n}{2}\right), \left(\frac{m-n}{2}\right)\right)$ f) $(3, -2)$

18.9 a) $(4, 0)$ b) $\left(\frac{165}{8}, -\frac{125}{8}\right)$ c) $\left(\frac{7}{4}, \frac{17}{4}\right)$

18.10 a) $4x = 36$ b) $18 + x$ c) $x - 10$ d) $x - \frac{x}{3}$ e) $\frac{2x}{5}$
 f) $x + (x + 1)$ g) $3x - \frac{x}{2}$ h) $4x$ i) $x + \frac{y}{2}$ j) $x = 2y$

18.11 21 y 7 18.12 120 y 90 18.13 20 y 30 18.14 6 y -7

18.15 $\frac{2.715}{19}$ y $\frac{648}{19}$ 18.16) $\frac{26.000}{9}$

18.17 128 18.18) $\frac{55^\circ}{3}$ y $\frac{215^\circ}{3}$ 18.19) $1.611.289$ y 479.392 18.20) $\frac{5}{7}$

18.21) $\frac{7}{5}$ 18.22 92 18.23 72 18.24 14 y 20 18.25 41 y 12

19.2 a) Hacia arriba, $x_m = 0$ b) Hacia arriba, $x_m = 2$ c) Hacia abajo, $x_m = 2$

19.6 a) Mínimo: $(2, -8)$ b) Máximo: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ c) Mínimo: $(-1, -12)$

d) Mínimo: $(0, 12)$ e) Mínimo: $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ f) Máximo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

- 19.7 1) Hacia arriba; mínimo: $(1, 0)$; $x_m = 1$; $y_c = 1$; $x_c = 1$
 2) Hacia arriba; mínimo: $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4})$; $x_m = \frac{5}{2}$; $y_c = 7$; No corta en x
 3) Hacia abajo; máximo: $(0, 5)$; $x_m = 0$; $y_c = 5$; $x_c = \sqrt{5}$ y $x_c = -\sqrt{5}$
 4) Hacia arriba; mínimo: $(1, 2)$; $x_m = 1$; $y_c = 3$; No corta en x .
 5) Hacia arriba; mínimo: $(0, -1)$; $x_m = 0$; $y_c = -1$; $x_c = 1$ y $x_c = -1$
 6) Hacia abajo; máximo: $(\frac{5}{6}, \frac{145}{12})$; $x_m = \frac{5}{6}$; $y_c = 10$; $x_c = -1,17$ y $x_c = 2,84$
- 20.1 a) ± 9 b) $\pm \frac{3}{4}$ c) $\pm \frac{1}{4\sqrt{2}}$ d) $\pm \frac{10^5}{3}$ e) ± 8
 f) $\pm \frac{13}{2\sqrt{2}}$ g) $\pm \frac{12}{5\sqrt{2}}$ h) $\pm \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ i) $10^5 \sqrt{10}$
- 20.2 a) 3, -4 b) 1, -5 c) 0, -10 d) 6, -7 e) $1, -\frac{1}{3}$ f) 11, -3
- 20.3 a) -2, -4 b) 12, 2 c) 15, -3 d) $\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{8}, -\sqrt{2}$ f) $\frac{3}{2}, -1$
- 20.4 a) 7, -4 b) $5, -\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ d) $4, \frac{1}{3}$
 e) $\frac{1}{3}, -1$ f) $\frac{8}{3}, 2$ g) 1, -2 h) 11, -1
- 20.5 a) Si; $x = 5$; $x = -1$ b) No; imaginarias c) Si; $x = 2$; $x = -3$
- 20.6 a) $\frac{1+\sqrt{97}}{4}, \frac{1-\sqrt{97}}{4}$ b) $10; \frac{1}{3}$ c) $1; -\frac{1}{14}$
 d) $-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}$ e) $\pm \frac{1}{2}$ f) Imaginarias
- 20.7 a) $4; -\frac{15}{19}$ b) No reales c) 5; 3,6
 d) $\frac{-1+2\sqrt{46}}{5}, \frac{-1-2\sqrt{46}}{5}$ e) 10, -10 f) 2; 8
- 20.8 a) 2 b) 6 c) -2 d) 3, 5 e) 12, -2 f) 0, 1
- 21.1 4, -9 21.2 $2+2\sqrt{6}; 2-\sqrt{6}$ 21.3 13; -10 21.4 $\pm 3, \pm 15$
- 21.5 15; 9 21.6 12; 13 21.7 Ancho = 9; Largo = 18
- 21.8 12; 7 21.10 3; 9 22.1 $24 + \sqrt{290}$ 22.2 $25\sqrt{5}$
- 22.3 $\sqrt{208}$ 22.4 $\sqrt{176}$ 22.5 $\sqrt{1.716}$ 22.6 $\frac{3\sqrt{91}}{5}$ 22.7 $\frac{25\sqrt{2}}{5}$

22.8 Altura = $11\sqrt{3}$; Área = $121\sqrt{3}$

22.9 a) 36 b) 216

22.10 $\sqrt{61}$

22.11 a) 6,535 b) 2,381

23.1 10,247 ; 6,303 ; 4,923 ; 8,077

23.2 198,529 ; 551,471

23.3 1.411,952 ; 133,203

23.4 26,833; 40,249; 22,361; 17,888

24.1 R_1 y R_2 son paralelas: $\frac{27}{6} = \frac{18}{4}$

24.2 25 m

24.3 5,00771

24.5 70,86 y 38,11

25.1 $\frac{528}{43}$ m

25.2 $\frac{75}{4}$ m

25.3 22,37 m

25.4 a) 162,11 b) 4,6

25.5 a) 192,67 b) 4,98

26.1

NOTAS	f	X_i
9 – 11	4	10
12 – 14	10	13
15 – 17	4	16
18 – 20	2	19

$X = 13,6$

Clase modal: 12 – 14

26.2

INASISTENCIAS	f	f_a	X_i
0 – 2	7	7	1
3 – 5	13	20	4
6 – 8	15	35	7
9 – 11	13	48	10

26.3

ALTURA	f	f_a
156 - 158	4	4
159 - 161	8	12
162 - 164	14	26
165 - 167	9	35
168 - 170	5	40

26.4

PESO	f_i
0.95 - 1.00	16
1.05 - 1.10	22
1.15 - 1.20	12

26.12 a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{2}{17}$ c) $\frac{3}{17}$

26.13 a) $\frac{22}{29}$ b) $\frac{11}{29}$ c) $\frac{10}{29}$ d) $\frac{14}{29}$ e) $\frac{15}{29}$ f) 0

26.14 a) $\frac{17}{40}$ b) $\frac{23}{40}$ c) $\frac{1}{40}$

26.15 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{20}$

26.16 a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{11}{15}$ c) $\frac{4}{14}$

26.17 $\frac{5}{6}$ 26.18 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{10}$

26.19 a) $\frac{4}{14}$ b) $\frac{10}{14}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{14}$ f) $\frac{11}{14}$ g) $\frac{11}{14}$ h) $\frac{3}{14}$

26.20 $\frac{1}{4}$ 26.21) $\frac{1}{8}$ 26.22) $\frac{1}{2}$ 26.23) $\frac{1}{2}$ 26.24) $\frac{7}{8}$ 26.25) $\frac{1}{4}$

26.26 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ 26.27 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{13}{24}$ d) $\frac{11}{24}$ e) 0

26.28 a) $\frac{16}{49}$ b) $\frac{4}{49}$ c) $\frac{1}{49}$ d) $\frac{8}{49}$ e) $\frac{4}{49}$ f) $\frac{2}{49}$

28.1 10 CLS
20 PRINT "MIS PROFESORES MERECEEN RESPETO"

28.2 a) HAY QUE ESTUDIAR b) 30 c) 15 – 24 d) – 9 e) 5 * 16 f) 80
g) – 11.5 h) – 12 * 10 i) 18 j) – 62 k) 26 l) 9 m) 36 o) – 21 p) 14

28.3 10 CLS
20 PRINT "ES CONVENIENTE ESTUDIAR TODOS LOS DIAS"
30 GO TO 20

28.4 NEW
10 PRINT "PARA DOMINAR EL"
20 PRINT "CONOCIMIENTO DEBO"
30 PRINT "ESTUDIAR CON CONSTANCIA"

28.5 10 CLS
20 FOR I = 1 TO 4
30 PRINT "NUESTROS PROFESORES MERECEEN SER RESPETADOS"
40 NEXT I

28.6 BUCLE LIMITADO
SIEMPRE DEBO LEER CON DETENIMIENTO
SIEMPRE DEBO LEER CON DETENIMIENTO
SIEMPRE DEBO LEER CON DETENIMIENTO
SIEMPRE DEBO LEER CON DETENIMIENTO
SIEMPRE DEBO LEER CON DETENIMIENTO

28.8 3
¿ENTENDISTE?
3
¿ENTENDISTE?
:
:

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Baldor A., *Álgebra Elemental*, Cultural Centroamericana, S. A., Guatemala, 1962.
- 2.- Figuera J., *Matemática 7º Grado*, Colegial Bolivariana, Caracas, 1993.
- 3.- Figuera J., *Matemática 8º Grado*, Colegial Bolivariana, Caracas, 1993.
- 4.- Spiegel M., *Theory and Problems of Statistics*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill Book Co., New York, 1975
- 5.- Baldor A., *Geometría Plana del Espacio y Trigonometría*, Cultural Venezolana, S. A., Caracas, 1985.
- 6.- Anderson R., *From Basic to Pascal*, Tab Books Inc., Pennsylvania, 1982.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

- Abcisa de un punto 116
- Afin
 - función, 128
- Amplificación de radicales 51
- Anteperíodo 2
- Aproximaciones de un número real 17
- Arquitectura de un computador 274

B

- Bimodal
 - conjunto, 246

C

- Clase
 - límite de, 250
 - límite inferior, 251
 - límite superior, 251
 - longitud de un intervalo de, 251
 - punto medio de una, 251
- Clase modal 253
- Clases 250
- Computador
 - arquitectura, 274
 - componentes, 274
 - discos duros de un, 277
 - discos flexibles de un, 277
 - dispositivos de entrada, 274
 - dispositivos de salida, 275
 - memoria principal, 276
 - unidad aritmético-lógica, 277
 - unidad central de proceso, 276
 - unidad de control de un, 277
- Computadora
 - qué es una, 273
- Concavidad de una parábola 184, 189
- Congruentes
 - figuras, 236
- Conjunto I
 - adición y sustracción en el, 7
 - multiplicación y división en el, 7
- Conjunto unimodal y bimodal 246
- Constantes en BASIC 287
- Coordenadas
 - de un punto sobre el eje X 118

- de un punto sobre el eje Y 118
- del origen, 117
- Coordenadas de un punto 77, 116
- Cuadrantes 115

D

- Datos no organizados 248
 - Datos organizados 248
 - media aritmética de, 253
 - moda de, 253
 - Desigualdad
 - adición de un número real a una, 68
 - multiplicación por número negativo, 69
 - multiplicación por número positivo, 69
 - Desigualdades 66
 - Diagramas de árbol 265
 - Discriminante de una ecuación 204
 - Distancia entre dos puntos 83
 - Distancia entre puntos de un plano 121
 - Distribución de frecuencias 248
 - para datos agrupados, 249
 - División de potencias de igual base, 37
 - División de raíces de igual índice 46
 - División en $\mathbb{R}$ 32
 - Dominio de una función 126
- ## E
- Ecuación cuadrática
 - solución mediante el cuadrado de la suma, 200
 - solución por factorización, 198
 - Ecuación de la recta
 - que pasa por dos puntos, 147
 - Ecuación de segundo grado
 - discriminante, 204
 - fórmula cuadrática, 202
 - raíces, 203
 - raíces imaginarias, 204
 - Ecuación general de la recta 144, 153
 - Ecuaciones cuadráticas 196
 - con incógnitas en el denominador, 208
 - con términos irracionales, 209
 - problemas que conducen a, 212
 - raíces o ceros de, 196

Ecuaciones cuadráticas puras
 solución de, 197
 Eje de coordenadas 115
 Eje de simetría de una parábola 184
 Euclides
 teorema de, 225
 Extracción de factores en una raíz 51

F

Figuras congruentes 236
 Figuras semejantes 236
 Foco de una parábola 183
 Fórmula cuadrática 202, 203
 Fracción generatriz, 2
 Fracción generatriz
 de expresión decimal exacta, 3
 de expresión decimal periódica mixta 4
 de expresión decimal periódica pura 4
 Fracción, período de una 1
 Fracciones
 exactas, 1
 inexactas, 1
 periódicas mixtas, 2
 periódicas puras, 1
 Frecuencia absoluta 248, 249
 Frecuencias
 distribución de, 248
 Función
 afin, 128
 cuadrática, 130
 definición de, 125
 hipérbola, 131
 real, 126
 representación gráfica de una, 128
 Función afin
 definición, 134
 dominio y rango, 130
 Función cuadrática 183
 dominio y rango, 131
 Función hipérbola
 dominio y rango, 132
 Función real
 dominio, 126
 rango, 126

H

Hardware 274
 Hipérbola rectangular 131

I

Independientes
 sucesos, 267
 Inecuación
 miembros de una, 101
 propiedades usadas para resolver una, 102
 transposición de términos, 103
 Inecuaciones
 con valor absoluto, 106
 problemas sobre, 112
 sistema de, 110
 solución de un sistema de, 110
 Inecuaciones de primer grado en $\mathbf{R}$ 101
 Intervalo de clase
 definición, 250
 longitud de un, 251
 Intervalos
 abiertos, 87
 al infinito, 93
 cerrados, 85
 en $\mathbf{R}$, 85
 operaciones de inclusión, 96
 operaciones de intersección, 96
 operaciones de unión, 96
 semiabiertos, 90
 Introducción de factores en una raíz 49
 Inverso de un número 31

L

Lenguaje de máquina 275
 Lenguajes de alto nivel 278
 Lenguajes de programación 278
 Límite de clase 250
 Límite inferior de una clase 251
 Límite superior de una clase 251
 Longitud de un intervalo de clase 251

M

Media aritmética de datos no organizados 246
 Media aritmética de datos organizados 253
 Media aritmética de datos organizados 253
 Memoria principal de un computador 276
 Método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones 165

Método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones 164

Método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones 160

Moda de datos organizados 253

Moda de una distribución 246

Multiplicación

- de números irracionales 30
- de potencias de igual base, 37
- de raíces de igual índice, 45

Multiplicación en **R**

- elemento neutro de la, 31
- elemento simétrico de la, 31
- propiedad asociativa 30
- propiedad conmutativa 30
- propiedad distributiva, 31

N

Número racional 1

- adición con uno irracional 23
- multiplicación por uno irracional, 29

Número real

- raíz enésima, 43
- valor absoluto, 71

Números irracionales

- multiplicación, 30
- representación, 7

Números racionales

- adición, 22
- adición de dos, 23
- multiplicación, 28

Números racionales e irracionales 5

Números reales 14

- adición de, 22, 25
- adición y sustracción de, 25
- característica del conjunto de los, 78
- elemento neutro de la adición, 24
- elemento simétrico de la adición de, 24
- multiplicación de, 28
- propiedad asociativa de la adición 24
- propiedad conmutativa de la adición 24
- propiedades de la adición de, 24

O

Ordenada de un punto 116

P

Parábola 130

- concavidad, 184, 189
- corte con los ejes cartesianos, 189
- eje de simetría, 184
- máximo o mínimo de una, 187
- vértice de una, 186

Pendiente de una recta 136

- determinación gráfica de la, 141, 142
- igual a cero, 138
- muy grande, 139
- negativa, 138
- positiva, 137

Período 1

Pitágoras

- el teorema de, 218

Plano real 115

Potencia

- de un producto, 39
- de una potencia, 39

Potencia de un número real 55

Potenciación en **R**

- con exponente cero, 36
- con exponente entero negativo, 36
- con exponentes enteros, 34

Probabilidad

- concepto de, 256
- de que un suceso no ocurra, 262
- definición a posteriori 258
- definición a priori, 256
- diagramas de árbol, 265

Programa 273, 278

Programación

- en lenguaje BASIC, 283
- instrucción CLS, 279
- instrucción END, 286
- instrucción FOR...NEXT 286
- instrucción PRINT, 279

Proporción

- definición de, 232

Punto medio de una clase 251

Punto sobre una recta 141

R

Racional, número 1

Racionalización de fracciones

- con numeradores o denominadores polinómicos, 62

- con numeradores o denominadores monómicos. 61
- Radicales
 - amplificación, 51
 - reducción a un mismo índice, 52
 - simplificación, 50
- Radicales semejantes 58
- suma y resta, 59
- Raíz
 - de un cociente 46
 - de un número real positivo, 42
 - de un producto 45
 - de una raíz 49
 - extracción de factores de una, 51
- Rango de una función 126
- Razón entre dos segmentos de recta 231
- Recta
 - ecuación general, 144
 - pendiente de una, 136
 - punto perteneciente a una, 141
- Recta numérica 77
- Recta real 77
 - distancia desde el origen, 82
 - distancia entre dos puntos, 83
 - intervalos abiertos, 87
 - intervalos al infinito, 93
 - intervalos cerrados, 85
 - intervalos en la, 85
 - intervalos semiabiertos, 90
 - sistema de coordenadas sobre la, 81
- Rectas
 - paralelas, 150
 - perpendiculares, 151
 - posición relativa de dos, 150
 - secantes, 150
- Reducción de radicales a un mismo índice 52
- Relación "Mayor o igual que" en $\mathbf{R}$ 67
- Relación "mayor o igual que" en $\mathbf{R}$ 67
- Relación "menor o igual que" en $\mathbf{R}$ 67
- Relaciones "mayor que" y "menor que" en $\mathbf{R}$ 65
- Representación gráfica de funciones 128
- S**
- Segmentos proporcionales 231
- Semejantes
 - figuras, 236
 - triángulos 238
- Semejanzas de triángulos 238
- Signos de desigualdades 66
- Simplificación de radicales 50
- Coordenadas cartesianas 115
- Sistema de ecuaciones 153
 - compatible, 156
 - compatible indeterminado, 157
 - incompatible, 157
 - método de eliminación, 165
 - método de igualación, 164
 - método de sustitución, 160
 - problemas que se resuelven por un, 171
 - simultáneas 154
 - solución gráfica, 154
- Sistema de inecuaciones 110
- Software 274
- Subconjuntos notables de $\mathbf{R}$ 16
- Sucesos independientes 267
- T**
- Teorema de Euclides 225
 - aplicaciones, 227
 - demostración, 226
- Teorema de Pitágoras 7, 218
- Teorema de Thales 232
- Términos irracionales en ecuaciones cuadráticas 209
- Thales
 - teorema de, 232
- Triángulos
 - semejanza de, 238, 240, 242
- U**
- Unidad aritmético-lógica de un computador 277
- Unidad central de proceso 276
- Unidad de control de un computador 277
- Unimodal
 - conjunto, 246
- V**
- Valor absoluto
 - de cero, 72
 - de un número real, 71
 - ecuaciones con, 74
 - propiedades del, 72
- Valor absoluto de un número real 71

Variables en BASIC	288
Vértice de una parábola	186